Centrul de Excelență Județean Iași

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

PROBLEME DE NUMĂRARE

Sergiu Prisacariu, Colegiul Național Iași
Gabriel Popa, Colegiul Național Iași

Reguli de numărare

- Dacă mulțimile A și B sunt disjuncte, atunci card $(A \cup B)$ = card A + card B.
- Card $(A \cup B)$ = card A + card B − card $(A \cap B)$.
- Card $(A \cup B \cup C)$ = card A + card B + card C − card $(A \cap B)$ − card $(B \cap C)$ − card $(C \cap A)$ + card $(A \cap B \cap C)$.
- Regula produsului: card $A \times B$ = card $A \cdot$ card B.
- Pentru a număra elementele unei mulțimi, căutăm s-o înlocuim cu o altă mulțime, având același număr de elemente și ale cărei elemente pot fi mai ușor numărate.

Probleme propuse

1. a) Stabiliți câte numere naturale mai mici ca 2014 sunt divizibile sau cu 2 sau cu 3 sau cu 5.
b) Stabiliți câte numere naturale mai mici ca 2014 sunt relativ prime cu 30.

2. Determinați cardinalul mulțimii $M = \left\{ x \in \mathbb{Q} \middle| \ x = \dfrac{n^2+3}{n^2+n}, n = 1, 2, ..., 50 \right\}$.

3. Găsiți toate numerele naturale de trei cifre pentru care $2^n + 6$ este divizibil cu 7.

4. Calculați numărul maxim de elemente care pot fi alese din mulțimea {1, 2, 3, …, 2014}, astfel încât suma oricăror două elemente alese să nu fie divizibilă cu 3.

5. Câte numere de n cifre, $n \geq 2$, se pot forma cu cifrele 1 și 2 (fiecare cifră apare măcar o dată)?

6. Câte numere de n cifre, $n \geq 3$, se pot forma cu cifrele 1, 2 și 3 (fiecare cifră apare măcar o dată)?

7. În câte moduri poate fi pavat un dreptunghi 2×10 cu plăci de dimensiuni 1×2?

8. Se scriu în ordine crescătoare toate numerele nenule din baza 10 în a căror scriere nu apar alte cifre afară de 0, 1, 2 şi 3. Care este cel de-al 2014-lea număr scris?

9. Un elev are 10 bile numerotate cu numerele 1, 2, … , 10. El trebuie să le pună în trei urne identice astfel încât în nici o urnă să nu fie două bile numerotate cu numere consecutive. În câte moduri poate face acest lucru?

10. Se numeşte matrice de tip $m \times n$ un tablou cu m linii şi n coloane, ale cărui celule sunt completate cu numere reale. Notăm cu M mulțimea matricelor de tip 4×4, completate cu elemente din mulțimea $\{-1, 0, 1\}$.
a) Care este cardinalul mulțimii M?
b) Câte dintre matricele din M au numai 0 pe diagonala principală? Dar măcar un 0?
c) Câte dintre matricele din M sunt simetrice față de diagonala principală?

11. Determinați numărul matricelor de tip 3×3, având ca elemente numerele 1 sau -1, în care produsul elementelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană este -1.

12. Arătați că o mulțime cu n elemente are 2^n submulțimi.

13. Determinați cardinalul mulțimii A, în cazul în care card $(A\times A)$ = card $\mathscr{P}(A)$.

14. Determinați numărul perechilor de mulțimi (A,B) care îndeplinesc simultan condițiile:
(i) $A\cup B\subseteq\{1,2,3,...,2014\}$; (ii) $A\cap B\subseteq\{1,2,3,...,1007\}$; (iii) $A\setminus B\neq\varnothing$.

Temă

1. Dintr-o clasă de 30 elevi, la olimpiada de limba română au participat 15 elevi, la matematică au participat 12 elevi şi 5 elevi au participat la ambele. Câți elevi nu au participat la nicio olimpiadă?

2. Fie mulțimile $A=\{3n-2 \mid n\in\mathbf{N}\}$, $B=\{1003-2m \mid m\in\mathbf{N}\}$ şi $C=\{6p+1 \mid p\in\overline{0,167}\}$.
Arătați că $A\cap B=C$.

3. Determinați cardinalul mulțimii $M=\left\{x\in\mathbb{Q} / x=\dfrac{n}{(n+6)(n+5)}, n\in\mathbb{Z}, |n|\leq 45\right\}$.

4. Determinați numărul maxim de elemente dintr-o mulțime A inclusă în $\{1,2,\dots,2013\}$ astfel încât, oricum am lua două numere din A, suma lor să nu fie divizibilă cu diferența lor.

5. Câte numere de n cifre, $n\geq 4$, se pot forma cu cifrele 1, 2, 3 și 4 (fiecare cifră apare măcar o dată)?

6. Pe câte drumuri poate ajunge un rege care se află pe tabla de şah din câmpul $A1$ în câmpul $A8$, efectuând exact 7 mutări?

7. Determinați numărul matricelor de tip 3×3, având ca elemente numerele 1 sau -1, în care produsul tuturor elementelor matricei este -1.

8. Stabiliți câte matrice $n\times n$, completate cu numere întregi, au proprietatea că produsul elementelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană este 5 sau -5.

9. Pe o tablă de şah 8×8 se aşează 8 turnuri astfel încât niciunul să nu atace vreunul dintre celelalte.
a) Arătați că un astfel de aranjament este posibil. Câte asemenea aranjamente există?
b) Pentru un astfel de aranjament de turnuri pe tablă, arătați că în orice pătrat 5×5 de pe tablă există cel puțin două turnuri.

10. Dacă $n=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{a_k}$, unde $p_1, p_2,\ldots,p_k$ sunt numere prime iar $a_1, a_2,\ldots,a_k\in\mathbb{N}^*$, demonstrați că numărul divizorilor naturali ai lui n este $(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_k)$.