PROBLEME DE NUMĂRARE

Sergiu Prisacariu, Colegiul Național Iași
Gabriel Popa, Colegiul Național Iași

Reguli de numărare

- Dacă mulțimile A și B sunt disjuncte, atunci card $(A \cup B)$ = card A + card B.
- Card $(A \cup B)$ = card A + card B – card $(A \cap B)$.
- Card $(A \cup B \cup C)$ = card A + card B + card C – card $(A \cap B)$ – card $(B \cap C)$ – card $(C \cap A)$ + card $(A \cap B \cap C)$.
- Regula produsului: card $A \times B$ = card $A \cdot$ card B.
- Pentru a număra elementele unei mulțimi, căutăm s-o înlocuim cu o altă mulțime, având același număr de elemente și ale cărei elemente pot fi mai ușor numărate.

Probleme propuse

1. a) Stabiliți câte numere naturale mai mici ca 2014 sunt divizibile sau cu 2 sau cu 3 sau cu 5.
b) Stabiliți câte numere naturale mai mici ca 2014 sunt relativ prime cu 30.

Soluție. a) Folosim principiul includerii şi excluderii. Avem: $\text{Card}(M_2) = 1007$, $\text{Card}(M_3) = 672$, $\text{Card}(M_5) = 403$, $\text{Card}(M_2 \cap M_3) = \text{Card}(M_6) = 336$, $\text{Card}(M_3 \cap M_5) = \text{Card}(M_{15}) = 135$, $\text{Card}(M_5 \cap M_2) = \text{Card}(M_{10}) = 202$, $\text{Card}(M_2 \cap M_3 \cap M_5) = \text{Card}(M_{30}) = 68$, deci $\text{card}(M_2 \cup M_3 \cup M_5) = 1007 + 672 + 403 - 336 - 135 - 202 + 68 = 1477$.
b) Evident, numărul cerut este egal cu $2014 - 1477 = 537$.

2. Determinați cardinalul mulțimii $M = \left\{ x \in \mathbb{Q} \middle|\ x = \dfrac{n^2+3}{n^2+n}, n = 1, 2, ..., 50 \right\}$.

Soluție. Dacă toate fracțiile de tipul $\dfrac{n^2+3}{n^2+n}$ ar fi distincte, M ar avea 50 de elemente; acest fapt ne se întâmplă însă. Condiția $x_n = x_m$ conduce la $\dfrac{n^2+3}{n^2+n} = \dfrac{m^2+3}{m^2+m}$, de unde $(n - 3)(m - 3) = 12$, prin urmare au loc egalitățile $x_4 = x_{15}$, $x_5 = x_9$, $x_6 = x_7$. Astfel, card$M = 50 - 3 = 47$.

3. Calculați numărul maxim de elemente care pot fi alese din mulțimea $\{1, 2, 3, \ldots, 2014\}$, astfel încât suma oricăror două elemente alese să nu fie divizibilă cu 3.

Soluţie. Nu putem alege mai mult de un multiplu de trei. De asemenea, nu putem alege în acelaşi timp un număr de forma $M_3 + 1$ şi unul de forma $M_3 + 2$, deoarece suma lor se va divide cu 3. Cum $\mathrm{Card}(M_3 + 1) = 672$, $\mathrm{Card}(M_3 + 2) = 671$ şi dorim să alegem cât mai multe numere, vom lua un multiplu de 3 şi toate numerele de forma $M_3 + 1$, adică $672 + 1 = 673$ numere.

4. Câte numere de n cifre, $n \geq 2$, se pot forma cu cifrele 1 și 2 (fiecare cifră apare măcar o dată)?

Soluție. Folosind cifrele 1 şi 2, putem forma 2^n numere de n cifre. Dintre acestea, 2 numere nu convin, fiind formate doar din cifre de 1 sau doar din cifre de 2. Rămâne că există $a_n = 2^n - 2$ numere cu proprietățile cerute.

5. Câte numere de n cifre, $n \geq 3$, se pot forma cu cifrele 1, 2 și 3 (fiecare cifră apare măcar o dată)?

Soluție. Folosind cifrele 1, 2 şi 3, putem forma 3^n numere de n cifre. Dintre acestea, 3 numere sunt formate doar din cifre de 1, de 2 sau de 3. Apoi, a_n conțin doar cifre de 1 sau 2, a_n conțin doar cifre de 1 sau 3, iar a_n conțin doar cifre de 2 sau 3. Rămâne că există $b_n = 3^n - 3(2^n - 2) - 3 = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3$ numere cu proprietățile cerute.

6. În câte moduri poate fi pavat un dreptunghi 2×10 cu plăci de dimensiuni 1×2?

Soluție. Notăm cu a_n numărul pavărilor dreptunghiului $2 \times n$ cu plăci de dimensiuni 1×2. Observăm că $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, iar $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Din aproape în aproape, obținem că $a_{10} = 89$.

7. Se scriu în ordine crescătoare toate numerele nenule din baza 10 în a căror scriere nu apar alte cifre afară de 0, 1, 2 şi 3. Care este cel de-al 2014-lea număr scris?

Soluție. De fapt, se scriu toate numerele naturale în baza 4, în ordine crescătoare. Întrebarea este ce formă are numărul 2014 în baza 4. Avem că $2014_{(10)} = 133132_{(4)}$.

8. Un elev are 10 bile numerotate cu numerele 1, 2, … , 10. El trebuie să le pună în trei urne identice astfel încât în nici o urnă să nu fie două bile numerotate cu numere consecutive. În câte moduri poate face acest lucru?

Soluție. Prima bilă poate fi aşezată în oricare dintre cele trei urne, iar fiecare dintre următoarele bile poate fi aşezată în oricare dintre cele două urne în care nu se află bila anterioară ei. Obținem $3 \cdot 2^9$ modalități de aşezare a bilelor.

9. Se numeşte matrice de tip $m \times n$ un tablou cu m linii şi n coloane, ale cărui celule sunt completate cu numere reale. Notăm cu M mulțimea matricelor de tip 4×4, completate cu elemente din mulțimea $\{-1, 0, 1\}$.

a) Care este cardinalul mulțimii M?
b) Câte dintre matricele din M au numai 0 pe diagonala principală? Dar măcar un 0?
c) Câte dintre matricele din M sunt simetrice față de diagonala principală?

Soluție. a) Avem de completat 16 poziții cu trei numere. Obținem că M conține 3^{16} matrice.

b) Avem de completat, cu trei numere, 12 poziții; cele 4 de pe diagonala principală se completează forțat, cu zerouri. Rezultă că M conține 3^{12} matrice cu 0 pe diagonala principală.
În ceea ce privește a doua întrebare, M conține $2^4 \cdot 3^{12}$ matrice care nu conțin zerouri pe diagonala principală, deci $3^{16} - 2^4 \cdot 3^{12} = 65 \cdot 3^{12}$ matrice conțin măcar un 0 pe diagonala principală.

c) Avem de completat, cu trei numere, 10 poziții: cele 4 de pe diagonala principală, precum și cele 6 de deasupra acesteia. Pozițiile de sub diagonala principală se completează forțat, datorită simetriei. Obținem că M conține 3^{10} matrice simetrice față de diagonala principală.

10. Determinați numărul matricelor de tip 3×3, având ca elemente numerele 1 sau -1, în care produsul elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană este -1.

Soluție. Avem libertate de completare doar într-un pătrat 2×2; restul de cinci poziții din matrice se completează forțat, astfel încât produsul elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană să fie -1. În concluzie, există $2^4 = 16$ matrice cu proprietatea dorită.

11. Arătați că o mulțime cu n elemente are 2^n submulțimi.

Soluție. Fie $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ mulțime cu n elemente. Asociem fiecărei submulțimi B a lui A o secvență $(x_1,x_2,...,x_n)$, formată numai din 0 și 1, astfel: $x_i=1 \Leftrightarrow a_i \in B$ și $x_i=0 \Leftrightarrow a_i \notin B$. Se observă ușor că numărul submulțimilor lui A coincide cu numărul secvențelor de n caractere, formate numai din 0 și 1. Cum numărul acestor secvențe este 2^n, înseamnă că A are 2^n submulțimi.

12. Determinați numărul perechilor de mulțimi (A,B) care îndeplinesc simultan condițiile:
(i) $A\cup B \subseteq \{1,2,3,...,2014\}$; (ii) $A\cap B \subseteq \{1,2,3,...,1007\}$; (iii) $A\setminus B \neq \varnothing$.

Soluție. Colorăm elementele lui $A\cup B$ cu patru culori: cu roșu elementele lui $A\cap B$, cu albastru elementele lui $A\setminus B$, cu verde elementele lui $B\setminus A$ și cu galben elementele rămase. Numărăm mai întâi perechile (A,B) care îndeplinesc ipotezele (i) și (ii): numerele $1,2,3,...,1007$ pot fi colorate cu oricare dintre cele patru culori, în timp ce numelele $1008,1009,...,2014$ nu pot fi colorate cu roșu; obținem deci $4^{1007} \cdot 3^{1007}$ astfel de mulțimi. Dintre acestea, $3^{1007} \cdot 2^{1007}$ nu îndeplinesc ipoteza (iii), întrucât nu mai putem folosi culoarea albastră. Rămâne că numărul perechilor căutate este egal cu $3^{1007}(4^{1007} - 2^{1007})$.

Temă

1. Dintr-o clasă de 30 elevi, la olimpiada de limba română au participat 15 elevi, la matematică au participat 12 elevi și 5 elevi au participat la ambele. Câți elevi nu au participat la nicio olimpiadă?

Soluție. Folosind notații sugestive, avem: Card($R \cup M$) = 15 + 12 – 5 = 22. Rezultă că 30 – 22 = 8 elevi nu au participat la nicio olimpiadă.

2. Fie mulțimile $A = \{3n - 2 \mid n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{1003 - 2m \mid m \in \mathbf{N}\}$ şi $C = \{6p + 1 \mid p \in \overline{0,167}\}$. Arătați că $A \cap B = C$.

Soluție. Dacă $x \in A \cap B$, atunci $x = 3n - 2 = 1003 - 2m$, prin urmare $n = 2k + 1$ și $m = 501 - 3k$. Deducem că $x = 6p + 1$ şi se arată uşor că $p \in \overline{0,167}$, aşadar $A \cap B \subseteq C$. Incluziunea inversă este imediată.

3. Determinați cardinalul mulțimii $M = \left\{ x \in \mathbb{Q} \middle| \ x = \dfrac{n}{(n+6)(n+5)}, n \in \mathbb{Z}, |n| \le 45 \right\}$.

Soluție. Procedând ca în soluția problemei **2** din primul set, obținem că mulțimea M are cardinalul 91 – 8 = 83.

4. Determinați numărul maxim de elemente dintr-o mulțime A inclusă în $\{1, 2, \dots, 2013\}$ astfel încât, oricum am lua două numere din A, suma lor să nu fie divizibilă cu diferența lor.

Soluție. Nu exită în A două numere consecutive, pentru că diferența lor, 1, va divide suma lor. Nu există în A nici două numere a căror diferență să fie 2, deoarece în acest caz, numerele vor avea aceeaşi paritate, deci suma lor va fi pară şi se va divide cu diferența. Rezultă că A are cel mult 671 de elemente, întrucât dacă vom considera mai multe, cel puțin două vor aparține unei aceleiaşi clase ale partiției

$$\{1, 2, 3, \dots, 2010\} = \{1,2,3\} \cup \{4,5,6\} \cup \dots \cup \{2011, 2012, 2013\},$$

iar diferența dintre aceste două numere va fi 1 sau 2.

Există mulțimi A cu exact 671 de elemente, de exemplu $A = \{1, 4, 7, \dots, 2011\}$: diferența oricăror două elemente ale acestei mulțimi este multiplu de 3, pe când suma acestor elemente este $M_3 + 2$.

5. Câte numere de n cifre, $n \ge 4$, se pot forma cu cifrele 1, 2, 3 și 4 (fiecare cifră apare măcar o dată)?

Soluție. Procedând ca în soluția problemei **6** din primul set, obținem că numărul căutat este egal cu $c_n = 4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4$.

6. Pe câte drumuri poate ajunge un rege care se află pe tabla de şah din câmpul $A1$ în câmpul $A8$, efectuând exact 7 mutări?

Soluție. Atașăm fiecărui câmp al tablei de șah câte un număr care arată câte drumuri care pleacă din $A1$ ajung până în câmpul respectiv, în număr minim posibil de mutări. Urmărind cum se completează tabla cu numere, observăm că numărul atașat unui câmp este suma numerelor din cele (cel mult) trei câmpuri aflate imediat sub el. Câmpului $A8$ i se asociază numărul 127.

7. Determinați numărul matricelor de tip 3×3, având ca elemente numerele 1 sau -1, în care produsul tuturor elementelor matricei este -1.

Soluție. Avem libertate de completare în 15 dintre pozițiile matricei; a 16-a poziție se completează forțat, astfel încât produsul elementelor matricei să fie -1. Astfel, există 2^{15} matrice cu proprietatea dorită.

8. Stabiliți câte matrice $n\times n$, completate cu numere întregi, au proprietatea că produsul elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană este 5 sau -5.

Soluție. Fiecare linie și fiecare coloană trebuie să conțină câte un unic număr de modul 5; există $n!$ modalități de așezare a acestor numere. Restul pozițiilor vor fi completate cu numere de module egal cu 1. Apoi, pentru fiecare poziție putem alege, la întâmplare, unul dintre semnele + sau –; acest lucru poate fi realizat în 2^{n^2} moduri. În concluzie, există $2^{n^2}\cdot n!$ matrice ca în enunțul problemei.

9. Pe o tablă de șah 8 × 8 se așează 8 turnuri astfel încât niciunul să nu atace vreunul dintre celelalte.

a) Arătați că un astfel de aranjament este posibil. Câte asemenea aranjamente există?

b) Pentru un astfel de aranjament de turnuri pe tablă, arătați că în orice pătrat 5 × 5 de pe tablă există cel puțin două turnuri.

Soluție. a) Pe fiecare linie și pe fiecare coloană trebuie să existe exact un turn. Există 8! modalități de așezare a turnurilor astfel încât acestea să nu se atace reciproc.

b) Rămân în afara pătratului 5 × 5, trei linii pe care sunt trei turnuri. Rămân în afara pătratului trei coloane pe care sunt cel mult trei turnuri. În afara pătratului sunt cel mult 6 turnuri (deci în pătratul 5 × 5 sunt cel puțin două turnuri).

10. Determinați cardinalul mulțimii A, în cazul în care card $(A\times A)$ = card $\mathscr{P}(A)$.

Soluție. Condiția din enunț revine la $n^2 = 2^n$, deci $n \in\{2;4\}$.

11. Dacă $n = p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{a_k}$, unde $p_1, p_2,\ldots,p_k$ sunt numere prime iar $a_1, a_2,\ldots,a_k \in \mathbb{N}^*$, demonstrați că numărul divizorilor naturali ai lui n este $(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_k)$.

Soluție. Dacă x este divizor al lui n, atunci el are forma $x = p_1^{i_1}\cdot p_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{i_k}$, cu $i_1 \in\{0, 1, \ldots, a_1\}$, …, $i_k \in\{0, 1, \ldots, a_k\}$. Folosind regula produsului, urmează concluzia problemei.