Concursul Interjudețean **ALEXANDRU MYLLER**
Ediția a XII-a, 23 ianuarie 2014
COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

Clasa a X-a

1. *Demonstrați că* $\lg 2 > \dfrac{100}{333}$.

Gabriel Popa

Soluție.

Trebuie, de fapt, să arătăm că $2^{333} > 10^{100}$. Conform inegalității lui Bernoulli, avem:

$$2^{333} = 8\cdot 1024^{33} = 8\cdot\left(1000\left(1+\frac{24}{1000}\right)\right)^{33} > 8\cdot 10^{99}\cdot\left(1+\frac{33\cdot 24}{1000}\right) = 10^{99}\cdot\frac{1792}{125} > 10^{100}.$$

2. *Afixele vârfurilor unui triunghi echilateral sunt numerele complexe a, b şi c. Considerăm numărul complex* $z = \dfrac{a}{a-b} + \dfrac{b}{b-c} + \dfrac{c}{c-a}$. *Demonstrați că partea reală a lui z este* $\dfrac{3}{2}$.

Sven Cortel

Soluție.

Trebuie să arătăm că $2z - 3 \in i\mathbb{R}$, adică $\dfrac{a+b}{a-b} + \dfrac{b+c}{b-c} + \dfrac{c+a}{c-a} \in i\mathbb{R}$.

Fie $q = \dfrac{a+b+c}{3}$ afixul centrului Q al triunghiului echilateral ABC din enunț, iar M, N şi P mijloacele laturilor BC, CA respectiv AB. Cum $QM \perp BC$, obținem că $\dfrac{q - \frac{b+c}{2}}{b-c} \in i\mathbb{R}$.
Scriem încă două relații similare şi, prin sumare, rezultă că

$$q\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{b+c}{b-c} + \frac{c+a}{c-a}\right) \in i\mathbb{R}.$$

Suma din prima paranteză este egală cu $\dfrac{ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$. Deoarece triunghiul ABC este echilateral, numărătorul acestei fracții este 0 şi, de aici, concluzia problemei.

3. *Spunem că o funcție* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *este "aproape identică" dacă există o funcție* $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *astfel încât*

$$f(f(n)) + g(f(n)) = n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) *Dacă funcția f este aproape identică, arătați că funcția asociată g este definită prin* $g(n)=0, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) *Dați exemplu de funcție aproape identică, alta decât funcția identică.*

c) *Demonstrați că singura funcție aproape identică şi monotonă este funcția identică.*

Claudiu Mîndrilă

Soluție.

a) Fie *f* o funcție aproape identică. Dacă $f(n)=f(m)$, atunci $f(f(n))=f(f(m))$ şi $g(f(n))=g(f(m))$, prin urmare $n=m$, deci *f* este injectivă.

Notăm $h=f\circ f$; funcția *h* este injectivă şi $h(n)=n-g(f(n))\le n, \forall n \in \mathbb{N}$. Se arată prin inducție că *h* este funcția identică.

Atunci *f* va fi bijectivă şi, cum $g(f(n))=0, \forall n \in \mathbb{N}$, urmează că $g(n)=0, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) De exemplu, $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(n)=n+(-1)^n$.

c) Funcția *f* fiind injectivă, monotonia va fi strictă. Codomeniul $\mathbb{N}$ având un cel mai mic element, *f* nu poate fi strict descrescătoare, aşadar va fi stict crescătoare. Prin inducție, se arată că $f(n)=n, \forall n \in \mathbb{N}$.