Concursul Interjudețean **ALEXANDRU MYLLER**
Ediția a XII-a, 23 ianuarie 2014
COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

Clasa a V-a

1. *Se consideră numărul* $N = 4^{2014} \cdot 5^{4032} + 18290$.

a) *Determinați primele trei cifre şi ultimele trei cifre ale lui N.*

b) *Arătați că numărul N este divizibil cu* 2, 3, 5 *şi* 10.

c) *Demonstrați că N nu este pătrat perfect.*

Soluție.

a) Observăm că $N = 625\underbrace{00...00}_{4013 \text{ de } 0}18290$, deci primele trei cifre ale lui *N* sunt 625, iar ultimele trei cifre sunt 290.

b) Cum ultima cifră a lui *N* este 0, numărul dat se divide cu 2, 5 şi 10. Suma cifrelor lui *N* fiind 33, are loc şi divizibilitatea cu 3.

c) *N* este divizibil cu 3, dar nu şi cu 9, prin urmare nu este pătrat perfect.

2. *Demonstrați că* 10^n *se poate scrie ca suma a două pătrate perfecte nenule, oricare ar fi numărul natural nenul n.*

Soluție.

Dacă $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$, îl putem scrie pe 10^n sub forma $10^n = 10^{2k+1} = \left(10^k\right)^2 + \left(3 \cdot 10^k\right)^2$.

În cazul în care $n = 2k + 2, k \in \mathbb{N}$, avem scrierea $10^n = 10^{2k+2} = \left(6 \cdot 10^k\right)^2 + \left(8 \cdot 10^k\right)^2$.

3. *Se consideră n numere naturale consecutive astfel încât produsul tuturor resturilor nenule obținute la împărțirile celor n numere prin* 5 *este egal cu* $3^{200} \cdot 4^{301}$. *Determinați valorile posibile ale numărului n.*

Soluție.

Începând cu primul rest nenul, formăm grupe de câte cinci resturi $(0,1,2,3,4)$, cu posibilitatea ca, fie la început, fie la sfârşit, să existe grupe incomplete. În fiecare grupă, produsul resturilor nenule este $2^3 \cdot 3$. Dacă numărul grupelor complete este *k*, produsul tuturor resturilor nenule din aceste grupe va fi $2^{3k} \cdot 3^k$.

Ținând cont de ipoteză, rezultă $k = 200$ şi mai avem nevoie de încă un rest nenul egal cu 4, care nu poate apărea în şirul resturilor decât la început, într-o grupă incompletă formată dintr-un singur rest. La sfârşit, şirul resturilor se poate încheia cu 4, cu 0 sau cu 1 (în ultimele două situații, existând la final o grupă incompletă). Corespunzător, obținem pentru *n* valorile $n \in \{1001, 1002, 1003\}$.