Concursul Interjudețean **ALEXANDRU MYLLER**
Ediția a XII-a, 23 ianuarie 2014
COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

Clasa a VI-a

1. a) *Se consideră mulțimea* $A=\{a,a+1,...,a+9\}$, *unde* a *este un număr natural oarecare. Găsiți trei submulțimi* B,C,D, *fiecare cu câte trei elemente, astfel încât* $B\bigcup C\bigcup D=A$, $B\bigcap C=B\bigcap D=C\bigcap D=\varnothing$, *iar suma elementelor fiecăreia dintre mulțimile* B, C *şi* D *să fie aceeaşi.*

b) *Împărțiți mulțimea* $A=\{1,2,...,2013\}$ *în trei submulțimi disjuncte două câte două, fiecare având acelaşi număr de elemente şi aceeaşi sumă a elementelor.*

Soluție.

a) Putem lua $B=\{a,a+4,a+8\}$, $C=\{a+1,a+5,a+6\}$ şi $C=\{a+2,a+3,a+7\}$.

b) Împărțim numerele de la 7 la 2013 în 223 grupe de câte nouă numere consecutive şi procedăm ca la a); numerele de la 1 la 6 le grupăm $\{1,6\},\{2,5\},\{3,4\}$ şi le adăugăm submulțimilor precedente.

2. *Un triunghi are lungimile laturilor numere naturale şi suma acestor lungimi este egală cu 10. Demonstrați că triunghiul nu este echilateral, dar este isoscel.*

Soluție.

Evident, 10 nu este multiplu de 3, deci triunghiul nu poate fi echilateral.

Cea mai scurtă dintre laturi are lungimea cel mult egală cu 3. Considerând, pe rând, cele trei cazuri şi ținând seama de inegalitatea triunghiului, obținem că singurele triunghiuri care satisfac cerințele enunțului sunt cele de laturi 2, 4, 4, respectiv 3, 3, 4, ambele isoscele.

3. a) *Găsiți* 16 *numere naturale astfel încât suma oricăror nouă dintre ele nu se divide cu* 9.

b) *Dați exemplu de opt numere de tipul* $7^a\cdot 11^b\cdot 13^c$ *cu proprietatea că produsul oricăror două nu este pătrat perfect.*

c) *Demonstrați că, din* 81 *de numere de tipul* $7^a\cdot 11^b\cdot 13^c$, *putem alege patru astfel încât produsul lor este putere a patra a unui număr natural.*

Soluție.

a) De exemplu, se pot alege opt numere de tipul $9k$ şi opt numere de tipul $9k+1$.

b) Se aleg, la exponenți, următoarele distribuții: (p,p,p), (p,p,i), (p,i,p), (i,p,p), (p,i,i), (i,p,i), (i,i,p) şi (i,i,i), unde p reprezintă un număr par, iar i un număr impar.

c) Împărțim cele 81 de numere în nouă grupe de câte nouă termeni. Folosind principiul cutiei, există în fiecare grupă câte două elemente având produsul pătrat perfect; obținem astfel nouă perechi de numere dintre cele date care au produsele pătrate perfecte.

Exponenții factorilor 7, 11 şi 13 din aceste produse sunt pari, deci având una dintre formele $4k$ sau $4k + 2$; există opt posibile distribuții modulo 4 ale exponenților produselor. Vom găsi două produse care au aceeaşi formă a exponenților pentru fiecare dintre factorii 7, 11 şi 13, iar produsul lor va fi putere a patra a unui număr natural.