Concursul Interjudețean **ALEXANDRU MYLLER**
Ediția a XII-a, 23 ianuarie 2014
COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

Clasa a VII-a

1. *Demonstrați că nu există numere întregi distincte a, b și c pentru care*

$$\{a,b,c\}=\{a-b,b-c,c-a\}.$$

Cosmin Manea și Dragoș Petrică

Soluție.

Notăm $A=\{a,b,c\}$ și $B=\{a-b,b-c,c-a\}$; presupunem, prin absurd, că există numerele întregi distincte *a*, *b* și *c* pentru care $A=B$. Atunci $a+b+c=(a-b)+(b-c)+$ $+(c-a)$, de unde $a+b+c=0$; avem deci $A=\{a,b,-a-b\}$ și $B=\{a-b,a+2b,-2a-b\}$. Cum $a\in B$, rezultă că $a=a-b$ sau $a=a+2b$ sau $a=-2a-b$. Considerând, pe rând, fiecare dintre cele trei cazuri, ajungem de fiecare dată să contrazicem faptul că numerele *a*, *b* și *c* sunt nenule și distincte.

2. *În interiorul paralelogramului ABCD se consideră punctul E, astfel încât E să nu se afle pe diagonala BD. Dreapta BE intersectează dreptele AD și CD în M, respectiv în N. Dreapta DE intersectează dreptele AB și BC în P, respectiv în Q. Demonstrați că dreptele MP și NQ sunt paralele.*

Soluție.

Din asemănarea triunghiurilor *NDE* și *BPE* obținem că $\frac{NE}{BE}=\frac{DE}{PE}$, de unde $BE\cdot DE=$ $=NE\cdot PE$. Analog, din asemănarea triunghiurilor *MDE* și *BQE* obținem că $\frac{ME}{BE}=\frac{DE}{QE}$, prin urmare $BE\cdot DE=ME\cdot QE$. Astfel, $NE\cdot PE=ME\cdot QE$, adică $\frac{NE}{ME}=\frac{QE}{PE}$. Reciproca teoremei lui Thales aplicată în triunghiul *ENQ* conduce la concluzia problemei.

3. *Pe latura AD a pătratului ABCD se consideră punctul N astfel încât* $AD=4\cdot AN$*, iar pe latura AB se consideră un punct M. Demonstrați că M este mijlocul segmentului AB dacă și numai dacă NM este bisectoarea unghiului* $\sphericalangle ANC$.

Soluție.

Presupunem că *M* este mijlocul laturii *AB*; atunci $\frac{AN}{AM}=\frac{BM}{MC}=\frac{1}{2}$, prin urmare triunghiurile *AMN* și *BCM* vor fi asemenea (L.U.L.). Deducem că unghiurile $\sphericalangle AMN$ și $\sphericalangle BMC$

sunt complementare, aşadar dreptele *MN* şi *CM* sunt perpendiculare. Notăm cu *P* intersecția dreptelor *AD* şi *CM*. Se arată uşor că *M* este mijlocul lui *CP*, deci *NM* va fi mediană şi înălțime în triunghiul *NCP*. Rezultă că *NM* este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ANC$.

Reciproc, presupunem că *NM* este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ANC$ şi fie M' mijlocul lui *AB*. Conform celor demonstrate mai sus, NM' va fi bisectoarea unghiului $\sphericalangle ANC$; din unicitatea bisectoarei, punctele *M* şi M' coincid.

Soluție alternativă.

Considerăm latura pătratului de lungime 4; atunci $AN = 1, ND = 3$ şi, cu teorema lui Pitagora, $CN = 5$. Notăm cu *O* şi cu *Q* punctele în care dreapta *MN* intersectează dreptele *AC*, respectiv *CD*. Din asemănarea triunghiurilor *AMN* şi *DQN*, obținem că $\frac{AM}{DQ} = \frac{AN}{ND}$, deci $QD = 3AM$. Din asemănarea triunghiurilor *AMO* şi *CQO* avem că $\frac{AO}{OC} = \frac{AM}{QC}$, iar $QC = 4 + 3AM$.

Folosind teorema bisectoarei şi reciproca sa, deducem: *NO* este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ANC \Leftrightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{NA}{NC} \Leftrightarrow \frac{AM}{QC} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{AM}{4+3AM} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow AM = 2 \Leftrightarrow M$ este mijlocul lui AB.