Concursul Interjudețean **ALEXANDRU MYLLER**
Ediția a XII-a, 23 ianuarie 2014
COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

Clasa a VIII-a

1. *Un șoricel vrea să mănânce un cașcaval de formă cubică, format din* 1001^3 *cubulețe de latură* 1. *După ce termină un cubuleț, poate trece doar la un altul care are o față comună cu cel abia terminat. Poate șoricelul să mănânce tot cașcavalul, astfel încât cubulețul din centru să-i rămână ultimul, ca desert?*

Soluție.

Răspunsul este afirmativ; vom descrie un traseu favorabil. Șoricelul intră în cub printr-un vârf al bazei superioare și, mergând în spirală, termină de mâncat ultimul etaj în cubulețul din centrul acestuia. Coboară în cubulețul din centrul penultimului etaj și, parcurgând aceeaşi spirală în sens contrar, termină acest nivel în cubulețul aflat sub cel în care s-a făcut intrarea în cub. Procedând analog, consumă cele 500 de etaje superioare și ajunge la etajul central, într-un colț al acestuia.

Parcurge în spirală acest etaj central, oprindu-se chiar înainte de cubulețul din centru. Coboară la nivelul 500, pe care îl va termina în colț. Continuă în același fel până jos, lăsând neconsumate cubulețele aflate sub cel central; când termină și baza inferioară, se va afla chiar lângă centrul acesteia. Șoricelului nu-i rămâne decât să urce turnulețul rămas, până în centrul cubului.

Raționamentul rămâne valabil în orice cub având latura număr natural de forma $4k+1$.

Notă.

În cazul în care latura cubului mare ar fi un număr impar n de forma $4k+3$, răspunsul la întrebarea problemei ar fi negativ.

Pentru a dovedi acest fapt, colorăm cubulețele cu alb și negru, obținând o tablă de șah tridimensională. Colțurile au aceeași culoare, fie aceasta neagră. Cubul conține $\frac{n^3+1}{2}$ cubulețe negre și $\frac{n^3-1}{2}$ cubulețe albe, deci mai multe cubulețe negre.

Presupunem că șoricelul ar putea găsi un drum care să se termine în centrul cubului. Pe traseu alternează cubulețele albe și cele negre iar cubulețul din centru este, în acest caz, alb. Rezultă astfel că numărul cubulețelor albe este cu 1 mai mare decât numărul celor negre. Contradicția la care am ajuns arată că presupunerea făcută este falsă.

2. *Numerele reale pozitive x, y și z au proprietatea că produsul oricăror două este cel mult egal cu* 1. *Demonstrați că*

$$\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{2+x^2+y^2}+\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{2+y^2+z^2}+\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{2+z^2+x^2}\geq\frac{3+xy+yz+zx}{2}.$$

Ionuț Ivănescu și Lucian Tuțescu

Soluție.

Ar fi suficient să demonstrăm că $\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{2+a^2+b^2} \geq \frac{1+ab}{2}, \forall a,b>0, ab\leq 1$ (spargem inegalitatea din enunț în trei inegalitați mai simple), iar acest lucru se realizează prin calcul direct.

3. *Demonstrați că, pentru orice număr natural n şi orice număr natural impar k, numărul* $1+2+3+...+n$ *divide* $1^k+2^k+3^k+...+n^k$.

Soluție.

Dacă a, b sunt numere naturale, atunci $a+b \mid a^k+b^k$, pentru orice număr impar *k*.

Notând $S=1^k+2^k+...+n^k$, avem că $2S=(1^k+n^k)+(2^k+(n-1)^k)+...+(n^k+1^k)$. Ținând cont de observația anterioară, rezultă că $(n+1)\,|\,2S$.

Analog, grupând

$$2S=n^k+(1^k+(n-1)^k)+(2^k+(n-2)^k)+...+((n-1)^k+1^k)+n^k ,$$

obținem că $n\,|\,2S$.

Nunerele *n* şi *n* + 1 fiind prime între ele şi produsul lor fiind par, concluzia se impune.