Concursul Interjudețean **ALEXANDRU MYLLER**
Ediția a XII-a, 23 ianuarie 2014
COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

Clasa a IX-a

1. *Se consideră triunghiul ABC cu $AB > AC$. Pe segmentul AB se ia punctul N astfel încât $BN = \frac{AB + AC}{2}$. Dacă M este mijlocul laturii BC, demonstrați că MN este paralelă cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$.*

Soluție.

Fie $AB = c$ și $AC = b$. Avem că $AN = \frac{c-b}{2}$ și, de aici, $\overrightarrow{AN} = \frac{c-b}{2c} \cdot \overrightarrow{AB}$. Rezultă că

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \frac{c-b}{2c} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2c}(b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC}).$$

Dacă AD este bisectoarea lui $\sphericalangle BAC$, $D \in (BC)$, atunci $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{b+c}(b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC})$, deci $\overrightarrow{NM} = \frac{2c}{b+c} \cdot \overrightarrow{AD}$. Concluzia se impune.

Soluție alternativă.

Pe prelungirea laturii *AB*, considerăm punctul *P* cu proprietatea că $AP = AC$ și fie AD bisectoarea lui $\sphericalangle BAC$. Unghiul $\sphericalangle BAC$ fiind exterior triunghiului isoscel ACP, rezultă că $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle ACP$, prin urmare dreptele *AD* și *CP* sunt paralele. Pe de altă parte, ipoteza $BN = \frac{AB + AC}{2}$ revine la faptul că *N* este mijlocul lui *BP*. Atunci *MN* va fi linie mijlocie în triunghiul *BCP*, așadar dreptele *MN* și *CP* sunt paralele și, de aici, concluzia problemei.

2. *Considerăm șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin:*

$$a_0 = x \in \mathbb{R}, 3a_{n+1} = a_n^2 - 6a_n + 18, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstrați că există o infinitate de valori iraționale ale lui x pentru care toți termenii șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ sunt numere naturale.

Radu Miron

Soluție.

Notând $b_n = \frac{1}{3}(a_n - 3)$, șirul $(b_n)_{n \geq 0}$ are proprietatea că $b_{n+1} = b_n^2, \forall n \in \mathbb{N}$. Se arată prin inducție că $b_n = b_0^{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$ și rezultă că $a_n = 3\left(\frac{x-3}{3}\right)^{2^n} + 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

Alegând $x = 3a\sqrt{3} + 3, a \in \mathbb{N}^*$, avem că $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi $a_n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

3. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *o progresie aritmetică cu raţia pozitivă* r *şi primul termen* $a_1 \geq \frac{1}{2}$. *Determinaţi partea întreagă a numărului*

$$S_n = \sqrt{1+\frac{r}{a_1 a_2}} + \sqrt{1+\frac{r}{a_2 a_3}} + ... + \sqrt{1+\frac{r}{a_n a_{n+1}}}\ , n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Soluție.

Evident, $S_n \geq n$. Apoi, cum $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$ pentru $x \geq -1$, avem că

$$S_n \leq n + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a_1 a_2} + \frac{r}{a_2 a_3} + ... + \frac{r}{a_n a_{n+1}}\right) = n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) =$$

$$= n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) < n + \frac{1}{2a_1} \leq n+1.$$

Am arătat astfel că $n \leq S_n < n+1$, prin urmare $[S_n] = n, \forall n \geq 2$.