Soluții

Clasa a IV-a

1. Pentru rezolvarea primelor 10 probleme, elevul a utilizat $5\times3+5\times5=40\,\text{min}$. Îi vom rămâne 50 de minute, deci câte 10 minute pentru fiecare dintre ultimele cinci probleme.

2. Sunt 50 de grupe, fiecare cu suma 1, deci suma totală este 50.

3. Avem că $(5+55+555+5555+55555):(1+11+111+1111+11111):5=5:5=1$.

4. Mircea are 40 colegi; în fața sa fiind un sfert, el se află pe locul 11.

5. Suma maximă se obține când ceasul arată 19:59 şi va fi 24.

6. Produsul $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2004$ conține factorul 1000, deci ultimele sale trei cifre sunt zerouri, iar suma $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2004+12$ va avea ultimele trei cifre 012.

7. Scriem teorema împărțirii cu rest: $D=\hat{I}\cdot C+R;\ 0\le R<\hat{I}$. Avem că $C=25;\ R=C-18=7$. Pentru ca deîmpărțitul să fie impar, trebuie ca împărțitorul să fie par şi din condiția $\hat{I}>7$ obținem că $\hat{I}=8$. În concluzie, $D=8\cdot25+7=207$. Suma cerută este $207+8+25+7=247$.

8. Aplicăm repetat teorema împărțirii cu rest. Fie a numărul căutat; atunci $a=3\cdot c+2$, $c=3\cdot x+2$, iar $x=3\cdot2+2=8$, prin urmare $c=26$, apoi $a=80$.

9. Fie x numărul lăzilor de 25kg şi y numărul lăzilor de 21kg; avem că $25\cdot x+21\cdot y=301$. Numai $x=7$ şi $y=6$ verifică această egalitate, deci sunt necesare 13 lăzi.

10. Notăm cu x numărul elevilor de pe ultimul rând. Pe rândurile din fața lui vom avea $x+3$, $x+6$, $x+9$ elevi. Suma fiind 58, obținem că $4x+18=58$, de unde $x=10$.

11. Fie p prețul unei mingi. Condiția din enunț se scrie sub forma $5p+100\,000=7p-220\,000$, de unde $p=160\,000$.

12. Fie m numărul marinarilor. Într-o zi ar termina hrana un număr de $60m$ marinari. După adăugarea a 30 de naufragiați, un număr de $50(m+30)$ oameni ar termina hrana într-o zi. Aşadar, $60m=50m+1500$, de unde $m=150$.

13. Fie n numărul săptămânilor peste care numărul băieților ar fi egal cu numărul fetelor. Numărul băieților va fi $12+n$, iar numărul fetelor $8+2n$. Egalând, obținem că $n=4$. După 4 săptămâni, numărul fetelor va fi 16, deci numărul membrilor cercului va fi de 32.

14. Considerăm numărul de forma _ _ _ 3. Primul loc va putea fi ocupat în 9 moduri, iar celelalte două locuri în câte 10 moduri fiecare. Aşadar, vom avea $9\cdot10\cdot10=900$ de numere.

15. Animalul rămas pe insulă este cel care a mâncat ultimul, adică un şarpe. Urmărim evoluția faunei pe insulă; notăm MiP situația existentă miercuri, înainte de prânz etc.

	MiC	MiP	MiD	MaC	MaP	MaD	LuC	LuP	LuD
Şerpi	1	1	2	2	2	6	6	6	19
Arici	—	1	1	1	4	4	4	13	13
Vulpi	1	1	1	3	3	3	9	9	9

Luni, înainte de micul dejun, pe insulă erau $19+13+9=41$ animale.

Clasa a V-a

1. Evident, $4+8+12+\dots 2000=4(1+2+3+\dots 500)=501000$.

2. Observăm că $2x$ sau $6x+4$ nu pot fi egale cu $2x-1$ sau cu $2x+1$. Rămân de analizat cazurile: $3x+5=2x-1 \Leftrightarrow x=-6 \notin \mathbf{N}$; $3x+5=2x-1 \Leftrightarrow x=-4 \notin \mathbf{N}$; $3x+5=5x+6 \Leftrightarrow x \notin \mathbf{N}$; $6x+4=5x+6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=2$. Astfel, $A=\{4,16,11\}$, $B=\{3,5,16\}$, deci $A \cap B$ are un element.

3. Ținând cont că $10b \vdots 2, 12c \vdots 2, 82 \vdots 2$, deducem că $a \vdots 2$. Dar a este prim, deci $a=2$. Printr-un raționament analog, obținem că $b=2$, $c=5$.

4. A se scrie sub forma $A=1\underbrace{000...0}_{2004 ori}-1=\underbrace{999\,...\,9}_{2004 ori}$, deci suma cifrelor numărului A este $9\cdot 2004=18036$.

5. Condiția $(x+1)(y-4)=15$ conduce la $x+1 \in D_{15}=\{1,3,5,15\}$. Studiind fiecare dintre cele patru cazuri, obținem soluțiile $(x,y)\in\{(0,19),(2,9),(4,7),(14,5)\}$.

6. Observăm că $a=5^x\cdot\left(1+5+5^2+5^3\right)=5^x\cdot 136=5^x\cdot 2^3\cdot 17$. Atunci a are $(x+1)\cdot 4\cdot 2=48$ divizori, prin urmare $x=5$.

7. $S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{19\cdot 20}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{19}-\frac{1}{20} \Rightarrow S=\frac{19}{20}$.

8. Impunem condiția $2a-5\,|\,3a+16$; dar $2a-5\,|\,2a-5$, deci $2a-5\,|\,47$. Deducem că $2a-5\in\{1,47\}$, adică $a\in\{3,26\}$.

9. Notăm cu $P=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 25$. Observăm că $5^6\,|\,P$, deci ultimele şase cifre ale lui P sunt zerouri. Suma căutată va fi tot 0.

10. Fie $\overline{ab}$ numărul minim căutat. Atunci $\overline{ab}^2+\overline{ab}^3=k^2 \Leftrightarrow \overline{ab}^2\left(\overline{ab}+1\right)=k^2 \Leftrightarrow \overline{ab}+1=l^2$. Cum $\overline{ab}$ este minim, atunci $\overline{ab}=15$.

11. Dacă vom scrie în baza 2 fiecare dintre cele patru numere, observăm că a are 51 de cifre, b are 48 de cifre, c are 46 de cifre, iar d are 49 de cifre. Rezultă că $c<b<d<a$.

12. Fie r numărul dragonilor roşii, iar v numărul dragonilor verzi. Condițiile din enunț se scriu sub forma $2r+4v=44 \Leftrightarrow r+2v=22$ şi $6v=6r-6 \Leftrightarrow v=r-1$. După înlocuire, deducem că $r+2(r-1)=22$, de unde $r=8$.

13. Deoarece Ionuț spală o maşină în 120 min, iar Dan va spăla în 120min trei maşini, rezultă că în 120min vor spăla împreună patru maşini. O maşină o vor spăla împreună în 30min, iar 3 maşini vor fi spălate în 90 min.

14. Observăm că $101-29=72$ dalmațieni au pete măcar pe o ureche. Notăm cu S mulțimea dalmațienilor ce au o pată pe urechea stângă şi cu D mulțimea dalmațienilor ce au o pată pe urechea dreaptă. Atunci $S\cap D$ va fi mulțimea dalmațienilor cu ambele urechi pătate, iar $|S\cup D|=72$. Din principiul includerii şi excluderii, $|S\cup D|+|S\cap D|=|S|+|D|$, deci $72+|S\cap D|=56+25 \Leftrightarrow |S\cap D|=81-72=9$.

15. Observăm că $3^{143}=3\cdot 3^{142}=3\cdot 9^{71}>2\cdot 8^{71}=2\cdot\left(2^3\right)^{71}=2\cdot 2^{213}=2^{214}$. Deducem de aici că $a>b$, întrucât $2^{214}+3^{143}>2\cdot 2^{214}=2^{215}=\left(2^5\right)^{43}=(32)^{43}>31^{43}$.

Clasa a VI-a

1. Avem: $15(7a-2b)=2(5a+4b)\Leftrightarrow 105a-10a=8b+30b\Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{2}{5}$.

2. Numărăm triunghiurile după numărul segmentelor ce formează latura orizontală. Cu latura dintr-un segment sunt 4 triunghiuri, cu latura din două segmente există 3 triunghiuri, cu latura din trei segmente avem 2 triunghiuri, iar cu latura din patru segmente, 1 triunghi. În total, există 10 triunghiuri.

3. Dacă x este măsura unghiului, atunci suplementul este $180-x$ iar complementul $90-x$, prin urmare diferența cerută va fi de 90^0.

4. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{1}{2003}-\frac{1}{2005}\right)=\frac{1002}{2005}$.

5. Fie a,b măsurile celor două unghiuri. Atunci $a+b=90^0$ şi $\frac{a}{b}=\frac{22}{38}$, de unde rezultă că $\frac{a}{22}=\frac{b}{38}=\frac{a+b}{22+38}=\frac{a+b}{60}=\frac{90}{60}=\frac{3}{2}$. Obținem că $a=33^0$, $b=57^0$, deci unghiul mai mare este de 57^0.

6. $\left(\overline{ab0}-\overline{ba}\right):9=99a:9=11a$.

7. Primul loc poate fi ocupat de oricare dintre cele patru persoane, al doilea loc de oricare dintre cele trei rămase, al treilea de către oricare dintre cele două persoane rămase, iar al patrulea se ocupă în mod unic. În total, avem $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ de aranjări.

8. $U\left(2^{2004}\right)=6$; $U\left(3^{2004}\right)=1$; $U\left(4^{2004}\right)=6$; $U\left(5^{2004}\right)=5$, $U\left(6^{2004}\right)=6$; $U\left(7^{2004}\right)=1$; $U\left(8^{2004}\right)=6$; $U\left(9^{2004}\right)=1$. Ultima cifră a numărului dat va fi 1.

9. Fie x numărul timbrelor de $4\,000$ lei şi y numărul celor de $9\,000$ lei. Atunci $4000\cdot x+9000\cdot y=35\,000$, de unde $4x+9y=35$, prin urmare $y\le 3$. Observăm că doar $y=3, x=2$ convine, deci sunt necesare cinci timbre.

10. Dacă x este măsura unghiului, atunci $\{180-x, 90-x\}$ I.P. $\{2, 5\}$, adică $360-2x=450-5x$, de unde $x=30$. Suma căutată va fi 210^0.

11. Fie n numărul maxim de unghiuri. Atunci

$$1+2+\ldots n\le 360\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2}\le 360\Leftrightarrow n(n+1)\le 720\Leftrightarrow n\le 26.$$

Aşadar, numărul maxim dorit este 26; se poate da uşor un exemplu de 26 de unghiuri care să satisfacă cerințele problemei.

12. Fie x prețul inițial. În primul caz, $P_1=\frac{110}{100}\cdot x$, iar $P_2=\frac{120}{100}\cdot P_1=\frac{120\cdot110}{100\cdot100}\cdot x$. În al doilea caz, $P_1'=\frac{120}{100}\cdot x$, iar $P_2'=\frac{110}{100}\cdot P_1'=\frac{110\cdot120}{100\cdot100}\cdot x$. Rezultă că prețul final va fi acelaşi.

13. Avem succesiv:

$$\frac{\overline{11x}-1}{99}+\frac{\overline{22x}-2}{99}+\ldots\frac{\overline{99x}-9}{99}=50\Leftrightarrow 9x+110(1+2+3+\ldots+9)=$$

$$=99\cdot50+1+2+\ldots+9\Leftrightarrow 9x+\frac{110\cdot9\cdot10}{2}=99\cdot50+\frac{9\cdot10}{2}\Leftrightarrow x=5.$$

14. Numărul cifrelor de zero este acelaşi cu exponentul lui 5 din descompunerea în factori primi a produsului $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2004$. Acest exponent este

$$\left[\frac{2004}{5}\right]+\left[\frac{2004}{5^2}\right]+\left[\frac{2004}{5^3}\right]+\left[\frac{2004}{5^4}\right]=400+80+16+3=499.$$

Astfel, numărul dat are ultimele 499 cifre egale cu zero.

15. Cel mai mare număr de pătrăţele ce pot fi tăiate este şapte, aşa cum se vede în figura de mai jos: