Soluții

Clasa a IV-a

1. $a = 1$.

2. Observăm că $9 \cdot 10 = 90 < 100$, iar $10 \cdot 11 > 100$, prin urmare $n \le 2$. Relația este verificată pentru $n \in \{0, 1, 2\}$, deci de trei numere.

3. $3+5+...+2005-2-4-...-2004 = (3-2)+(5-4)+...+(2005-2004) = \underbrace{1+1+...+1}_{1002\ \text{termeni}} = 1002.$

4. Numerele căutate sunt $9 \cdot 12, 9 \cdot 13, 9 \cdot 14, \dots, 9 \cdot 100$. Numărul lor este $100-12+1 = 89$.

5. Dacă de pe prima fişă a rezolvat a probleme, de pe a doua a rezolvat $20-a$ probleme. În total, Ionel a rezolvat $a+(20-a) = 20$ probleme din totalul de 40. El mai are de rezolvat încă 20 de probleme.

6. Avem că $\overline{ab}+\overline{ba} = 143 \Leftrightarrow (10a+b)+(10b+a) = 143 \Leftrightarrow a+b = 13.$ Cum $a < b,$ atunci $\overline{ab}$ poate lua valorile 49, 58 sau 67. Suma acestor trei numere este 174.

7. Numărul fetelor brunete cu ochi albaştri este $19+22-36 = 5$.

8. Dacă x este numărul copiilor cu două acadele, iar y este numărul celor cu cinci acadele, atunci $2x+5y = 9.$ Singura soluție este $x = 2$, $y = 1$, iar numărul merelor este $4x+3y = 4 \cdot 2+3 \cdot 1 = 11$.

9. Notăm cu s, c, p prețul unui stilou, unui caiet, respectiv unui pix. Din ipoteză, avem că $2s = 3c = 5p,$ iar $6s+5c = 210000$. Atunci $6s = 9c,$ deci $14c = 210000,$ prin urmare $c = 15000.$ Apoi, obținem că $s = 22500,$ iar $p = 9000.$

10. Fie x numărul de caiete care se vând zilnic. Stocul inițial era $200+5x$. Dacă s-ar vinde zilnic $x+200$ caiete, această cantitate s-ar epuiza în 4 zile, deci $4(x+200) = 200+5x \Leftrightarrow x = 600$. Inițial, în librărie erau $200+5 \cdot 600 = 3200$ caiete.

11. Cum $2005 = 5 \cdot 401$, iar $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2004$ conține factorii 5 şi 401, primul termen al sumei se împarte exact pin 2005. Restul împărțirii lui a prin 2005 va fi restul împărțirii lui 2006 la 2005, adică 1.

12. Numerele şterse sunt 13, 14, 16, 15.

13. Fie $4a$ numărul de pagini citite zilnic în primul caz; cartea are $31 \cdot 4a = 124a$ pagini. În al doilea caz, Maria citeşte a pagini în prima zi, $a+1$ pagini în a doua, $\dots$, $a+30$ în ultima zi, deci cartea are

$$a+(a+1)+\dots+(a+30) = 31a+(1+2+\dots+30) = 31(a+15) \text{ pagini.}$$

Deducem că $124a = 31(a+15),$ de unde a = 3. Cartea are $124 \cdot 3 = 372$ pagini.

14. Fie a numărul adulților din grupa 1, b numărul adulților din grupa 2 şi c numărul adulților din grupa 3. Atunci $a+b+c = 14$, $a+2b+3c = 25$, $a > 6$ şi $2b+3c > 17$, deci $a = 24-(2b+3c) < 25-17 = 8$ şi astfel rezultă că $a = 7$. În aceste condiții, $b+c = 7$ şi $2b+3c = 18$, prin urmare $c = (2b+3c)-$ $-2(b+c) = 18-2 \cdot 7 = 4$ şi apoi $b = 3$. În concluzie, grupa 1 are 7 adulți şi 7 copii, grupa 2 are 3 adulți şi 6 copii, iar grupa 3 are 4 adulți şi 12 copii.

15. Fie n numărul crengii pe care se va afla cioara când va croncăni a 40-a oară. Înainte de a ajunge pe a n-a creangă, numărul total de croncănituri era $1+2+\dots+(n-1) = (n-1) \cdot n : 2$, iar după ce-şi termină concertul pe creanga n, devine $1+2+...+n = n(n+1) : 2$. Din ipoteză, ştim că $n(n-1) : 2 < 40 < n(n+1) : 2,$ prin urmare $n(n-1) < 80 < n(n+1)$. Singurul număr natural care verifică această condiție este $n = 9$.

Clasa a V-a

1. Puterile de trei cifre ale lui 5 sunt $5^3 = 125$ şi $5^4 = 625$. Evident că $3 = 1+2$, însă $4 \neq 6+2$; rezultă că $\overline{ab} = 12$.

2. Dacă numărul ar avea toate cifrele nenule, suma lor ar fi cel puțin $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{10 \text{ de } 1} = 10$. În cazul nostru, suma este 9, deci măcar o cifră este 0; produsul cifrelor va fi 0.

3. Cum putem calcula (în numere naturale) treimea şi sfertul numărului, înseamnă că acesta este multiplu de $[3, 4] = 12$. Singurul multiplu de 12 cuprins între 90 şi 100 este 96.

4. $x^2 + 10^{2004} = 10^{2005} \Rightarrow x^2 = 10^{2005} - 10^{2004} \Rightarrow x^2 = 10^{2004}(10-1) \Rightarrow x^2 = 9 \cdot 10^{2004} \Rightarrow x = 3 \cdot 10^{1002}$.

5. Din $\overline{ab} + \overline{ba} = 110$ obținem că $11(a+b) = 110 \Leftrightarrow a+b = 10$, deci $\overline{ab} \in \{19, 28, 37, \ldots, 91\}$. Suma elementelor mulțimii este $S = (19+91)+(28+82)+(37+73)+(46+64)+55 = 4 \cdot 110 + 55 = 495$.

6. Fie $a = 7k$, $b = 7m$, cu $(k, m) = 1$, astfel încât $a^2 + b^2 = 637$. Obținem succesiv că $49(k^2 + m^2) = 637 \Leftrightarrow k^2 + m^2 = 13 \Leftrightarrow (k, m) \in \{(2, 3); (3, 2)\}$. Rezultă că numerele căutate sunt 14 şi 21.

7. Observăm că a poate fi orice cifră, iar $\overline{bc} \in \{00, 25, 50, 75\}$. Numărul de combinații care trebuie încercate este $10 \cdot 4 = 40$.

8. Avem că $a = 2^{3+6+\ldots+300} = 2^{3 \cdot 5050} = \left(32^3\right)^{1010}$; rezultă că numărul mai mic este b.

9. Primii 12 termeni trebuie aleşi cât mai mici, deci îi vom considera $1, 2, \ldots, 12$. Dacă x este termenul cel mai mare, atunci $1+2+\ldots+12+x = 92 \Leftrightarrow x = 14$.

10. Fie $\overline{abcd}$ numărul căutat; atunci $\overline{abcd} - \overline{abc} = 2005 \Leftrightarrow 9 \cdot \overline{abc} + d = 9 \cdot 222 + 7$. Cum d este cifră, vom avea în mod necesar că $d = 7$, apoi $\overline{abc} = 222$, deci $\overline{abcd} = 2227$.

11. Evident că n se divide cu 2 şi cu 3; cum vrem ca el să fie cât mai mic, vom considera $n = 2^a \cdot 3^b$. Atunci $2n = 2^{a+1} \cdot 3^b$ este pătrat perfect, deci $a+1 \vdots 2$, $b \vdots 2$ şi $3n = 2^a \cdot 3^{b+1}$ este cub perfect, deci $a \vdots 3$, $b+1 \vdots 3$. Cele mai mici valori ale numerelor a, b cu aceste proprietăți sunt $a = 3$, $b = 2$, deci valoarea minimă a lui n este $2^3 \cdot 3^2$. Numărul divizorilor va fi $(3+1)\cdot(2+1) = 12$, deci numărul divizorilor proprii este 10.

12. Factorii $2 \cdot 16$, $2 \cdot 17$, ..., $2 \cdot 25$ aduc zece factori de 2. Apoi, $2^2 \cdot 8$, $2^2 \cdot 9$, ..., $2^2 \cdot 12$ aduc încă cinci factori de 2. Din $2^3 \cdot 4$, $2^3 \cdot 5$, $2^3 \cdot 6$ obținem încă trei de 2, încă doi factori de 2 apar din $2^4 \cdot 2$, $2^4 \cdot 3$ şi încă unul din 2^5. In total, avem $10+5+3+2+1 = 21$ factori de 2.

13. Fie $13k$ şi $13(k+1)$ cei doi multipli consecutivi ai lui 13; atunci $13k + 13(k+1) = 13(2k+1)$ are 9 divizori. Dacă $2k+1$ nu se divide cu 13, atunci $13(2k+1)$ ar avea un număr par de divizori, fals. Obligatoriu vom avea că $2k+1 = 13m^2$, cu m prim. Pentru $m = 2$, obținem $2k+1 = 52$, fals. Pentru $m = 3$, obținem $2k+1 = 117 \Leftrightarrow k = 58$, prin urmare numerele vor fi 754 şi 767. Pentru $m \geq 5$, vom obține numere cu mai mult de trei cifre. În concluzie, numărul cerut este 767.

14. Fie a, b factorii inițiali. Factorul greşit b se măreşte cu 300, se micşorează cu 20 şi apoi se măreşte cu 1; în total, acesta se măreşte cu 281. Obținem astfel că $a \cdot b = 63455$, $a(b+281) = 136234$, de unde $281a = 72779$, prin urmare $a = 259$, apoi $b = 245$.

15. Oricare ar fi numărul $a \in \{0, 1, 2, \cdots, 2004\}$ cu care am completa pătrățelul aflat pe linia 1, coloana 2, pătratul mare admite în continuare o completare unică, astfel:

1	a	2 004 – a
2 004 – a	1	a
a	2 004 – a	1

Cum există 2005 modalități de alegere a lui a, există 2005 modalități de completare a tabelului.

Clasa a VI-a

1. Cifrele mai mari trebuie aşezate la început şi, cum ele nu trebuie să se repete, numărul va fi 98750.

2. Mulțimea cifrelor numărului este fie $\{a, b, c\} = \{2, 3, 5\}$, fie $\{a, b, c\} = \{1, 5, 6\}$. În fiecare caz există câte şase numere, deci în total vom avea 12 numere.

3. În formă zecimală, $\frac{19}{22} = 0,8(63)$. Suma primelor 50 de zecimale este $8 + 24(6+3) + 6 = 230$.

4. Fie a, a, b laturile triunghiului. Nu putem avea $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$, deoarece $2a > b$ (din inegalitatea triunghiului). Rămâne că $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$ şi atunci perimetrul va fi $3b + 3b + b = 7b$. Raportul dintre bază şi perimetru este $\frac{b}{7b} = \frac{1}{7}$.

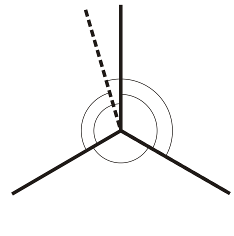
5. $S = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{1}{1+2+\ldots+99} = \frac{2}{2\cdot3} + \frac{2}{3\cdot4} + \ldots + \frac{2}{99\cdot100} = 2\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) =$
$= 2\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{100}\right) = 2\cdot\frac{49}{100} = \frac{49}{50}$.

6. Din teorema împărțirii cu rest, avem: $1330 = nc_1 + 10 \Rightarrow n \mid 1320$; $344 = nc_2 + 8 \Rightarrow n \mid 336$, prin urmare $n \mid (1320, 336)$. Cum $(1320, 336) = 24$, obținem că $n \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. Pe de altă parte, împărțitorul nu poate fi mai mic decât restul, deci $n \geq 11$. Cea mai mică valoare pe care o poate lua n este 12.

7. Folosind proprietățile şirurilor de rapoarte egale, $\frac{x+y}{8} = \frac{y-x}{3} = \frac{20}{z} = \frac{2y}{11} = \frac{2x}{5} \Rightarrow x = \frac{50}{z}, y = \frac{110}{z}$. Însă $x, y \in \mathbf{N}^*$, deci $z \mid (50, 110) \Leftrightarrow z \mid 10 \Leftrightarrow z \in \{1, 2, 5, 10\}$. Singura valoare a lui z pentru care $x + y + z \leq 30$ este $z = 10$, caz în care obținem $x = 5, y = 11, z = 10$.

8. Avem: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x + 3y = xy \Leftrightarrow x(y-3) = 3y \Leftrightarrow x = \frac{3y}{y-3}$. Însă $x \in \mathbf{N}$, deci $y - 3 \mid 3y$ şi atunci $y - 3 \mid 3y - 3(y-3) \Leftrightarrow y - 3 \mid 9$. Obținem că $y \in \{4, 6, 12\}$, prin urmare $(x, y) \in \{(12, 4); (6, 6); (4, 12)\}$. Numărul soluțiilor ecuației este 3.

9. Patru semidrepte cu aceeaşi origine formează $\frac{4\cdot3}{2} = 6$ unghiuri. Nu este posibil ca toate cele şase unghiuri să fie obtuze, însă putem forma 5 unghiuri obtuze, procedând ca în figura alăturată. Rezultă că numărul maxim posibil de unghiuri obtuze este 5.



10. Observăm că $m(\sphericalangle xOy) = m(\sphericalangle xOz) + m(\sphericalangle zOy) = a°b' + b°a' = (a+b)°(a+b)'$. Trebuie să obținem un număr întreg de grade, deci $a + b \vdots 60$. Pe de altă parte, $2 \le a + b \le 118$, deci singura posibilitate este ca $a + b = 60$, prin urmare $m(\widehat{xOy}) = 61°$.

11. Folosim metoda reducerii la unitate. O pisică va mânca un şoarece într-o oră şi jumătate, deci 10 pisici vor mânca 10 şoareci tot într-o oră şi jumătate. Atunci, 10 pisici vor mânca 20 şoareci în trei ore. Altfel, se poate aplica regula de trei compusă.

12. Fie $x+1$ numărul participanților la petrecere (incluzâd-o şi pe Ioana). Ioana cunoaşte după nume şi după înfățişare $\frac{x}{2}$ persoane, numai după nume $63-\frac{x}{2}$, iar numai după înfățişare $\frac{8x}{10}-\frac{x}{2}=\frac{3x}{10}$. Avem succesiv: $\frac{x}{2}+\left(63-\frac{x}{2}\right)+\frac{3x}{10}=x \Leftrightarrow \frac{7x}{10}=63 \Leftrightarrow x=90$. În concluzie, la petrecere au participat 91 de persoane.

13. Evenimentul este imposibil: numărul prim 2003 este sau printre cele alese, sau printre cele care rămân, deci numai unul dintre cele două produse se divide cu 2003. Probabilitatea cerută este 0.

14. Scriem toate produsele $a \cdot b \cdot c$ cel mult egale cu 100, unde $a \le b \le c$ sunt numere prime:

$2\cdot2\cdot2,\ 2\cdot2\cdot3,\ 2\cdot2\cdot5,\ 2\cdot2\cdot7,\ 2\cdot2\cdot11,\ 2\cdot2\cdot13,\ 2\cdot2\cdot17,\ 2\cdot2\cdot19,\ 2\cdot2\cdot23;$

$2\cdot3\cdot3,\ 2\cdot3\cdot5,\ 2\cdot3\cdot7,\ 2\cdot3\cdot11,\ 2\cdot3\cdot13;$

$2\cdot5\cdot5,\ 2\cdot5\cdot7;$

$2\cdot7\cdot7;$

$3\cdot3\cdot3,\ 3\cdot3\cdot5,\ 3\cdot3\cdot7,\ 3\cdot3\cdot11;$

$3\cdot5\cdot5.$

În total, există 22 de numere cu lungimea 3.

15. Observăm că aria unui dreptunghi este număr par, cel mult egal cu 20 cm^2. Ținând seama de acest fapt şi numărând dreptunghiurile după lățime, avem posibilitățile:

l	1 1 1 . . . 1	2 2 2 . . . 2	3 3	4 4
L	2 4 6 . . . 20	2 3 4 . . . 10	4 6	4 5

Suma perimetrelor va fi $S = 2\Big[\big(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{10\text{ termeni}}\big)+\big(\underbrace{2+2+\ldots+2}_{9\text{ termeni}}\big)+(3+3)+(4+4)\Big]+2\big[(2+4+\ldots+20)+$ $+(2+3+\ldots+10)+(4+6)+(4+5)\big] = 450\text{ cm}.$