Soluții

Clasa a IV-a

1. Dacă x este numărul căutat, atunci $(9-x)\cdot 8=40 \Leftrightarrow 9-x=5 \Leftrightarrow x=4.$

2. Fie x numărul fetelor; numărul băieților va fi $x+3$. Avem:

$$(x+3)+4=2(x-4) \Leftrightarrow x+7=2x-8 \Leftrightarrow x=15.$$

În clasă vor fi 15 fete şi 18 băieți, în total 33 de elevi.

3. Observăm că $b=11a, c=111a,$ prin urmare $a+b+c=132a.$ Câtul împărțirii lui $a+b+c$ prin 132 va fi a, deci egal cu 45.

4. Avem: $x+(x+1)=(x-1)+2006 \Leftrightarrow 2x+1=x+2005 \Leftrightarrow x=2004.$

5. Cum suma pe prima coloană este egală cu suma de pe linia a doua, rezultă că $x+9=10+12,$ de unde $x=13.$

6. Avem că $a=6b+31, b>31.$ Atunci $196>a-b=5b+31>5\cdot 31+31=185 \Rightarrow a-b=191.$ Corespunzător, găsim $b=32$, deci $a=191+32=223.$

7. Avem că $m=6p,$ de unde $7p+c=28.$ Cum numerele p şi c sunt cel puțin egale cu 1, vom obține soluțiile $(6,1,21),(12,2,14),(18,3,7).$

8. Numerele căutate sunt $21\cdot 5, 21\cdot 6, \ldots, 21\cdot 47,$ în total 43 de numere.

9. Numărul trebuie să aibă cât mai puține cifre, iar eventualele cifre mici să se afle la începutul numărului. Cu acest raționament, numărul căutat va fi 2 999 999.

10. Dacă a este numărul din mijloc, cele trei numere vor fi $84:a, a, 192:a.$ Ştim că $84:a+192:a=46,$ de unde $276:a=46,$ adică $a=6.$ Numerele vor fi 14, 6, 32.

11. Dacă x este numărul de probleme corect rezolvate, numărul celor rezolvate greşit este 26 – x. Obținem că $8x=5(26-x) \Leftrightarrow 8x+5x=130 \Leftrightarrow x=10.$

12. În două ore, Ioana culege 3 lădițe, deci cele două fete vor culege împreună 4 lădițe în 120 de minute. Ele vor culege împreună 3 lădițe în 90 de minute.

13. Dacă x este suma de bani pe care o are mama, Tudor va avea x – 14 lei, iar Paul va avea x – 10 lei. Suma totală a celor trei este 3x – 24, deci sumele egale din final sunt x – 8. Mama trebuie să dea 6 lei lui Tudor şi 2 lei lui Paul.

14. Fie $\overline{19ab}$ anul naşterii. Avem: $1+9+a+b=1999-\overline{19ab} \Rightarrow 10+a+b=99-10a-b \Rightarrow 11a+2b=89.$ Atunci a este cifră impară şi găsim că $a=7, b=6.$ Vârsta mea actuală, în 2006, este 2006 – 1976 = 30 ani.

15. Fie x timpul necesar pentru coborâre în prima zi. Timpul la urcare a fost 7 – x. În a doua zi, timpul la urcare a fost 14 – 2x, iar cel de la coborâre $x:2.$ Deducem că $(14-2x)+x:2=8 \Rightarrow x=4.$ În a doua zi, Sisif a urcat 6 ore şi a coborât 2 ore. În a treia zi va urca 12 ore şi va coborî 1 oră, deci va munci în total 13 ore.

Clasa a V-a

1. 9875

2. Ecuația se poate scrie sub forma $3^{x+1}=81,$ deci x = 3.

3. Numărul termenilor sumei este (2006 – 26) : 6 + 1 = 331.

4. Pătratele din mulțimea dată sunt 0^2, 1^2, 2^2, ..., 31^2, în total 32.

5. O mulțime X care verifică relația din enunț va conține elementele 3, 4 şi 5 şi, eventual, unul sau ambele elemente 1 şi 2. Astfel, avem patru submulțimi convenabile X.

6. Explicitând relația din enunț, obținem că x – y = 5, unde x şi y sunt cifre nenule. Rezultă că există patru numere care verifică egalitatea dată.

7. Avem că $a(b+c)=c(b+c)\Leftrightarrow 1003a=1003c\Leftrightarrow a=c.$ Atunci $a+2b+c=2b+2c=2006.$

8. Produsul dintre 9 şi un număr de patru cifre are cel mult cinci cifre şi suma cifrelor divizibilă cu 9. În cazul nostru, produsul nu poate fi decât 73755, deci numărul căutat este 73755 : 9 = 8195.

9. Ştim că restul împărțirii unui număr x la 13 este 7 şi vrem să aflăm restul împărțirii la 13 a numărului 17x. Cum x = 13c + 7, atunci $17x=13\cdot 17x+119=13(17x+9)+2,$ deci restul căutat este 2.

10. Există zece astfel de numere, anume 3000, 2100, 2010, 2001, 1200, 1020, 1002, 1110, 1101 şi 1011.

11. Cele patru diferențe dintre numărul mai mare şi celelalte numere sunt numere naturale nenule şi distincte. Cum suma lor este 10, aceste diferențe nu pot fi decât 1, 2, 3 şi 4. Rezultă că numerele căutate sunt de forma x, x – 1, x – 2, x – 3, x – 4. Din x + (x – 1) + (x – 2) + (x – 3) + (x – 4) = 60, deducem că x = = 14, prin urmare numerele sunt 10, 11, 12, 13, 14.

12. Orice putere (cu exponent cel puțin egal cu 2) a lui 5 are ultimele două cifre ...25. Ultimele două cifre ale puterilor lui 7 se repetă cu perioada 4, deci ultimele două cifre ale lui 7^{2006} sunt aceleaşi cu cele ale lui 7^2, deci sunt ...49. Suma dată se va termina în ...74

13. În produsul tuturor elementelor lui M, fiecare fracție care apare poate fi grupată cu inversa sa, prin urmare produsul va fi egal cu 1.

14. Fie a şi b cele două numere. Din a = 2bn şi a + b = 3n + 5, obținem că b(1 + 2n) = 3n + 5. Atunci $2n+1\,|\,3n+5$ şi, cum $2n+1\,|\,2n+1,$ rezultă că $2n+1\,|\,2(3n+5)-3(2n+1),$ deci $2n+1\,|\,7.$ Numărul n fiind nenul, convine doar valoarea n = 3 şi atunci b = 2, a = 12.

15. De fapt, se scriu în ordine crescătoare toate numerele naturale nenule, în baza 4. Al 2006-lea număr scris va fi $2006_{(4)}$ = 133112.

Clasa a VI-a

1. 100000002.

2. $36^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 144^\circ.$

3. Dacă x este prețul inițial, prețul după ieftinire va fi $x-20\%\cdot x=\frac{4x}{5}.$ După o scumpire cu p%, prețul devine $\frac{4x}{5}+p\%\cdot\frac{4x}{5}=\frac{4x}{5}\left(1+\frac{p}{100}\right).$ Din condiția $\frac{4x}{5}\left(1+\frac{p}{100}\right)=x,$ obținem că p = 25.

4. 55°.

5. Suma maximă este 6 – 1 + 7 – 2 + 8 – 3 + 9 – 4 + 10 – 5 = 25.

6. $\frac{3}{7}.$

7. Dacă a, b sunt cantitățile de apă aflate inițial în fiecare vas, în urma celor trei operații, cantitățile se modifică astfel: $\frac{a}{2}, b+\frac{a}{2}$ după prima operație, $\frac{3a}{4}+\frac{b}{2}, \frac{b}{2}+\frac{a}{4}$ după a doua operație, $\frac{3a}{8}+\frac{b}{4}, \frac{5a}{8}+\frac{3b}{4}$ după a treia operație. Cum $\frac{5a}{8}+\frac{3b}{4}$ = 10, rezultă că 5a + 6b = 80. Singurele soluții în numere naturale ale acestei ecuații sunt a = 4, b = 10 și a = 10, b = 5.

8. Numărul $a=120\left(1+3^4+3^8+...+3^{4n-4}\right)$ este divizibil cu 120, oricare ar fi numărul natural nenul n.

9. Avem că n = 1,00(600330303300) și, cum 2007 = 2 + $12\cdot 167$ + 1, rezultă că cea de-a 2007-a zecimală a lui n este prima cifră a perioadei, adică 6.

10. Relația dată se rescrie sub forma $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot...\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{100^n}\cdot x=\frac{1}{100^n\left(n+1\right)}$, de unde se obține că x = 1.

11. Dacă notăm cu a numărul natural care se scrie cu n cifre de 1 (în baza 10), avem de comparat fracțiile $\frac{2a+1}{3a+1}$ și $\frac{5a+1}{6a+1}$. Aducând la același numitor, se constată ușor că mai mare este cea de-a doua fracție.

12. Trebuie să găsim numere naturale nenule a și n astfel încât a + (a + 1) + ... + (a + n – 1) = 360, unde ultimul termen este cel mult egal cu 180. Obținem că n(2a + n – 1) = 720 și se observă că cei doi factori au parități diferite. Valoarea maximă a lui n este 16.

13. Mai pe scurt, cele trei unghiuri ale triunghiului sunt invers proporționale cu 3^n, 3^{n+1}, 3^{n+2}. Din $\frac{A}{3^n}=\frac{B}{3^{n+1}}=\frac{C}{3^{n+2}}=\frac{A+B+C}{3^n\left(1+3+9\right)}=\frac{180}{3^n\cdot 13}$, deducem că $A=\frac{180}{13}, B=\frac{180\cdot 3}{13}, C=\frac{180\cdot 9}{13}$.

14. Avem că $S=\frac{10^{2006}\left(10^{2006}+1\right)}{2}=2^{2005}\cdot 5^{2006}\cdot\left(10^{2006}+1\right)$. Cum ultimii doi factori sunt impari, exponentul lui 2 în descompunerea în factori primi a numărului S este 2005.

15. Folosind formula lui Legendre sau numărând pas cu pas, obținem că în descompunerea în factori primi a lui 2006!, exponentul lui 7 este 331, iar exponentul lui 11 este 199. Pentru ca fracția dată să fie număr natural, trebuie ca $x\le 331, y\le 199$, deci x ia 332 de valori, iar y ia 200 de valori. Mulțimea A conține $332\cdot 200=66400$ elemente.