Al IV-lea Concurs naţional de matematică ,,A. Myller"

Iaşi, 19 aprilie 2006

Barem – Juniori

Subiectul 1. Să se arate că ecuaţia

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}=\frac{1}{c}$$

are o infinitate de soluţii în $\mathbb{N}^*$.

Soluţie. Avem, de exemplu, soluţiile $a=2n, b=2n+1, c=n,\ n\in\mathbb{N}^*$.

Subiectul 2. Fie ABC un triunghi dreptunghic în C şi punctele D, E pe laturile (BC), respectiv (CA) astfel încât $\frac{BD}{AC}=\frac{AE}{CD}=k$. Dreptele BE şi AD se intersectează în O. Să se arate că unghiul $\angle BOD=60^\circ$ dacă şi numai dacă $k=\sqrt{3}$.

Soluţie. Construim dreptunghiul $ACDP$. Deoarece $\angle BOD\equiv\angle AOE$ şi $k=\frac{AE}{AP}$, este suficient să arătăm că $\angle AOE\equiv\angle APE$.... **4 puncte**
Trebuie deci să arătăm că patrulaterul $APOE$ este inscriptibil. Aceasta rezultă de exemplu, observând asemănările de triunghiuri PBD cu EPA şi PAD cu PEB.................................. **3 puncte**

Subiectul 3. Se dau în plan 5 puncte cu proprietatea că oricare dintre cele 10 triunghiuri cu vârfurile în aceste puncte are aria cel mult egală cu 1. Să se arate că există un trapez de arie cel mult egală cu 3 ce conţine (în interior sau pe laturi) cele 5 puncte.

Soluţie. Fie A, B, C, D, E punctele date şi ABC triunghiul de arie maximă.. **2 puncte**
Distanţa de la D la BC este cel mult egală cu distanţa de la A la BC, deci D - şi analog E - se situează între paralela din A la BC şi simetrica acesteia faţă de BC. Raţionând similar în raport cu AB şi AC, delimităm în plan o zonă triunghiulară $A_1B_1C_1$ ce are ABC drept triunghi median.................................... **3 puncte**
Punctele D şi E se situează în cel mult 2 din triunghiurile A_1BC, AB_1C, ABC_1, deci trapezele ABA_1B_1, BCB_1C_1 sau ABA_1B_1 - de arie cel mult 3 - rezolvă problema........................ **2 puncte**