Al IV-lea Concurs naţional de matematică ,,A. Myller"

Iaşi, 19 aprilie 2006

Barem – Seniori

Subiectul 1. Fie $p \geq 3$ un număr prim. Demonstraţi că

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{k^p - k}{p} \equiv \frac{p+1}{2} \pmod{p}.$$

Soluţie. Avem $\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1} k = (p+1)/2$, deci rămâne să arătăm că $p^2 | \sum_{k=1}^{p-1} k^p$ .... **2 puncte**
Grupând în ultima sumă termenii egal depărtaţi de ,,extremi" obţinem

$$k^p + (p-k)^p = \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} k^{p-i} p^i. \qquad \textbf{2 puncte}$$

Rezolvarea se încheie observând că fiecare coeficient binomial este divizibil cu p şi fiecare termen al sumei mai conţine cel puţin încă un factor p. .... **3 puncte**

Subiectul 2. Fie p un număr prim, $p \geq 5$. Determinaţi numărul polinoamelor de forma

$$X^p + pX^k + pX^l + 1,\ k > l,\ k, l \in \{1, 2, \ldots, p-1\},$$

care sunt ireductibile în $\mathbb{Z}[X]$.

Soluţie. Dacă l şi k au parităţi diferite atunci obţinem un polinom cu rădăcina -1, care este divizibil cu $X-1$. .... **2 puncte**
Arătăm acum că în cazul când k şi l au aceeaşi paritate obţinem un polinom ireductibil. Într-adevăr, dacă înlocuim X cu $X-1$ obţinem polinomul $X^p + p(X-1)^k + p(X-1)^l - \binom{p}{1}X^{p-1} + \binom{p}{2}X^{p-2} - \ldots + \binom{p}{p-1}X$, pentru care:

- coeficientul dominant nu este divizibil cu p;
- toţi ceilalţi coeficienţii sunt divizibili cu p;
- termenul liber este $\pm 2p$, deci nu este divizibil cu p^2.

Astfel, conform criteriului lui Eisenstein, polinomul este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$ .... **4 puncte**
Numărul cerut este $\binom{p-1}{2} + \binom{p-1}{2} = (p-1)(p-2)$. .... **1 punct**

Subiectul 3. Mediana AM a triunghiului ABC taie cercul înscris în K şi L. Dreptele duse prin K şi L paralele la BC taie a doua oară cercul înscris în X şi Y. Fie P şi Q intersecţiile dreptelor AX şi AY cu BC. Arătaţi că $BP = CQ$.

Soluţie. Fie $Z = AQ \cap KX$. Trebuie demonstrat că $ZK = KX$. Considerăm punctele D, E de tangenţă ale cercului la AB şi AC. Fie $N = AM \cap DE$. Punctele A, N sunt conjugate armonic faţă de K, L, adică $\frac{KN}{NL} = \frac{KA}{AL}$. Cum $\frac{KA}{AL} = \frac{ZK}{YL}$, observăm că problema este rezolvată dacă arătăm că punctele X, N, Y sunt coliniare (în aceste caz avem $\frac{KN}{NL} = \frac{KX}{YL}$)... **4 puncte**
Pentru coliniaritatea X, N, Y folosim teorema lui Newton în trapezul $BCUV$, ($U \in AC$, $V \in AB$) circumscris cercului considerat. Observăm că punctul N este situat pe diametrul perpendicular pe BC, care este axă de simetrie a trapezului isoscel $YLXK$. Aceasta arată coliniaritatea punctelor X, N, Y.......................... **3 puncte**