SOLUȚII

CLASA a VII-a

Subiectul 1.

Avem $x^3 - y^3 = x - y \Rightarrow x^2 + xy + y^2 = 1$ şi analoagele.

Rezultă $xy + y^2 = xz + z^2$, de unde $x(y-z)=(z-y)(z+y)$, de unde concluzia.

Subiectul 2.

a) Avem cinci numere de forma $3k, 3k+1$ sau $3k+2.$ Dacă există trei de aceeaşi formă, atunci suma lor se divide la 3. Dacă nu, avem distribuția 2-2-1, şi adunăm câte unul din fiecare.

b) Aleg 5 din cele 17 şi extrag 3 cu suma divizibilă cu 3. Din cele 14 rămase aleg analog 3 cu suma 0 (mod 3) şi continuăm procedeul, obținând 5 grupe de 3 numere cu suma divizibilă cu 3. Cele 5 sume sunt $3a, 3b, 3c, 3d, 3e$. Din a, b, c, d, e aleg trei cu suma divizibilă cu 3, ceea ce încheie soluția.

Subiectul 3.

a) Ortocentrul triunghiului ABC aparține lui M.

b) Să presupunem $BD \le DC$. Fie $X_1 \ne X_2 \in M$. Construim simetricul B' al lui B față de D.

Dacă $B' \ne C$, patrulaterul $AX_2B'C$ e inscriptibil şi rezultă

$$\angle X_2BC = \angle XB'B = \angle X_2AC = 90^\circ - \angle ACB.$$

Obținem $BX_2 \perp AC$, de unde $X_2 = H$. Analog $X_1 = H,$ fals. Deci $B' = C$, cu alte cuvinte $AB = AC$ şi $M = (AD)$.

Subiectul 4.

Fie R intersecția dreptelor AP şi OM; notăm S intersecția dreptelor BP şi $ON.$ Evident $ORPS$ este dreptunghi, deci $\frac{PR}{ON} = \frac{OS}{ON}.$ Din teorema catetei în triunghiul OBN obținem $\frac{OS}{ON} = \frac{OB^2}{ON^2}.$ Ținând seama de faptul că triunghiurile OBN şi MAO sunt asemenea, deducem $\frac{OB}{ON} = \frac{AM}{OM}.$ Teorema catetei în triunghiul AOB ne dă $\frac{AM^2}{OM^2} = \frac{MR \cdot MO}{OM^2} = \frac{MR}{MO}.$

Deducem $\frac{RP}{ON} = \frac{MR}{MO};$ cum $\angle MRP = \angle MON$ rezultă că triunghiurile MRP şi MON sunt asemenea. Urmează M, N, P coliniare, q.e.d.

Subiectul 1.

Fie E intersecția dreptelor *PM* şi *BB'* şi *F* intersecția dreptelor *BC* şi *MN*. Din congruențe rezultă $BE = FB = \frac{1}{2}AB$. Triunghiul *B'AC* este echilateral şi din paralelismul dreptelor *AC* şi *A'C'* rezultă că unghiul cerut este de 60°.

Subiectul 2.

Avem $a^2 + ab + b^2 = 1 \Rightarrow (2a+b)^2 + 3b^2 = 4$, de unde $b \in \{-1,0,1\}$. De aici n=0.

Subiectul 3.

Cele 10 segmente au 20 de capete printre cele 6 puncte; conform principiului cutiei, există un punct din care pornesc cel puțin 4 segmente. Dacă există un punct din care sunt duse 5 segmente, al şaselea formează triunghi. Dacă nu, fie *A* punctul din care pleacă 4 segmente, anume *AB*, *AC*, *AD*, *AE*, şi *F* al şaselea punct. Dacă între *B*, *C*, *D*, *E* există un segment, atunci se formează triunghi. Dacă nu, mai rămân doar segmente din *F*, şi acestea nu pot fi şase, fals.

Subiectul 4.

Fie $SA_1=a$, $SB_1=b$, $SC_1=c$; avem $A_1B_1^2 = a^2 + b^2 - ab$ şi analoagele.

Rezultă $a^2+b^2-ab=a^2+c^2-ac=c^2+b^2-cb$, de unde obținem $a=b=c$. De aici $\frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{SC_1}{SC}$, de unde cerința.

Subiectul 1.
Dacă $x<0$, atunci $\frac{[x]}{\{x\}}<[x]\le x<\frac{2007x}{2008}$, deci în acest caz nu avem soluţii.

Fie acum $x=m+a$, $m\in R$, $a\in(0,1)$. Ecuaţia $\frac{m}{a}=\frac{2007(m+a)}{2008}$ este echivalentă cu $f(a)=0$, unde $f(a)=2007a^2+2007am-2008m.$ Discriminantul ecuaţiei este pozitiv iar produsul rădăcinilor este negativ, deci avem o rădăcină pozitivă şi una negativă. Pentru ca să avem o rădăcină acceptabilă este necesar şi suficient ca $f(1)>0$ şi $m>0,$ adică $0<m<2007.$ Pentru fiecare astfel de valoare a lui m avem câte un $a\in(0,1).$ Deoarece există 2006 de valori ale lui $m,$ ecuaţia are 2006 soluţii.

Subiectul 2.
Prin încercări avem soluţiile $(0,\pm 2),(2,\pm 10),(-1,\pm 2),(-2,\pm 6)$. Arătăm că nu există alte soluţii. Considerăm egalităţile

$$(8x^3+4x^2-x)^2=64x^6+64x^5-16x^3+x^2$$
$$(8x^3+4x^2-x+1)^2=64x^6+64x^5+8x^3+9x^2-2x+1.$$

Deoarece în cazul $x\ge 3$ avem $-16x^3+x^2<256<8x^3+9x^2-2x+1$, rezultă că numărul $64(x^6+x^5+4)$ se află între pătratele perfecte consecutive $(8x^3+4x^2-x)^2$ şi $(8x^3+4x^2-x+1)^2$, deci nu este pătrat perfect.
Apoi, pentru $x\le -3$ avem $-16x^3+x^2>256>8x^3+9x^2-2x+1$, deci numărul $64(x^6+x^5+4)$ se află între pătratele perfecte consecutive $(8x^3+4x^2-x+1)^2$ şi $(8x^3+4x^2-x)^2$ şi nu este pătrat perfect.

Subiectul 3.
Fie d_1,d_2 distanţele de la B şi D la AC şi d_3,d_4 distanţele de la B şi D la CE. Notăm $BD\cap AC=M, BD\cap CE=N$. Atunci

$$\frac{\text{aria}(ACD)}{\text{aria}(ACB)}=\frac{d_2}{d_1}=\frac{DM}{BM},\quad \frac{\text{aria}(BCE)}{\text{aria}(CDE)}=\frac{d_3}{d_4}=\frac{BN}{DN}.$$

Rezultă

$$\frac{\text{aria}(ABC)}{\text{aria}(ABCD)}=\frac{1}{1+\frac{\text{aria}ACD}{\text{aria}ABC}}=\frac{1}{1+\frac{d_2}{d_1}}=\frac{1}{1+\frac{DM}{BM}}=\frac{BM}{BD}$$

şi, analog, $\frac{\text{aria}(CDE)}{\text{aria}(BCDE)}=\frac{DN}{BD}$. De aici rezultă concluzia imediat.

Subiectul 4.
a) Considerăm dreapta d, simetrica dreptei AM faţă de N. Deoarece dreptele d şi BM nu sunt paralele, ele au un punct comun Q. Punctul P, simetricul lui Q faţă de N, se află pe dreapta AM, iar N este mijlocul segmentului $[PQ]$.
b) Fie O centrul cercurilor. Avem relaţia $2\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}$, de unde

$$4\overrightarrow{ON}^2=\overrightarrow{AP}^2+\overrightarrow{BQ}^2+2\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BQ}=AP^2+BQ^2,$$

deoarece triunghiul AMB este dreptunghic.

CLASA a X-a

Subiectul 1.

Deoarece $\frac{DG_1}{G_1A_1}=\frac{1}{2}$, avem $\overrightarrow{AG_1}=\frac{2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}}{3}$. Dar $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ şi $\overrightarrow{AA_1}=2\overrightarrow{AO}$,

aşadar $\overrightarrow{AG_1}=\frac{3\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{AO}}{3}$. Fie punctul P' astfel ca $\overrightarrow{AP'}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AG_1}$. Rezultă că $\overrightarrow{AP'}=\frac{3\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{AO}}{5}$, ceea ce ne arată că punctul P' se află pe OG, şi că $\frac{P'G}{P'O}=\frac{2}{3}$. Cum P' se află şi pe AG_1, rezultă că $P'=P$ şi deci $\frac{PG}{PO}=\frac{2}{3}$.

Subiectul 2.

. Folosind formula binomului lui Newton, obţinem

$$C_{17}^1a^{16}b-3C_{17}^3a^{14}b^3+\ldots+3^8b^{17}=1,$$

de unde deducem că $b=1$ sau $b=-1$. Dacă $b=1$, cum C_{17}^k se divide cu 17 pentru orice k, $1\le k\le 16$, rezultă că 3^8-1 se divide cu 17, ceea ce e fals. Deci $b=-1$.
Similar, dacă $a\ne\pm1$, deducem că a^2 divide $3^8+1=2\cdot17\cdot193$, fals. Dacă $a=1$, avem $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{17}=c+i\sqrt{3}$, de unde, folosind scrierea trigonometrică, obţinem $4^{17}\sin\frac{34\pi}{3}=1$, absurd.
La fel se elimină cazul $a=-1$.

Subiectul 3.

Fie n numărul de laturi ale poligonului. Cazul $n=3$ este evident.
Examinăm acum cazul $n=4$. Fie $A_1A_2A_3A_4$ patrulaterul inscriptibil. Evident, există două vârfuri adiacente având măsura mai mare sau egală cu 90°; fie acestea A_3 şi A_4. Cum triunghiurile $A_1A_3A_4$ şi $A_2A_3A_4$ sunt isoscele, rezultă că $A_1A_4=A_4A_3=A_3A_2$, deci A_1A_2 este paralelă cu A_3A_4. Deducem că $A_1A_2A_3A_4$ este pătrat sau trapez isoscel. Examinând al doilea caz, deducem că trapezul are proprietatea cerută dacă $m(\angle A_1)=m(\angle A_2)=72^\circ$, iar $m(\angle A_3)=m(\angle A_4)=108^\circ$.
Fie acum $n\ge5$ şi $A_1A_2\ldots A_n$ poligonul respectiv. Patrulaterul $A_1A_2A_3A_4$ are de asemenea proprietatea din enunţ, deci $A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4$. La fel, folosind patrulaterul $A_2A_3A_4A_5$ deducem $A_2A_3=A_3A_4=A_4A_5$, etc. Rezultă că poligonul este regulat. Examinând unghiurile triunghiului $A_1A_2A_4$, deducem $n=5$.

Subiectul 4.

Deoarece lungimea intervalului $\left(2^nr-\frac{1}{4},2^nr+\frac{1}{4}\right)$ este $\frac{1}{2}$, există un unic număr întreg în acest interval. Fie acesta t_n. Aşadar $2^nr-\frac{1}{4}<t_n<2^nr+\frac{1}{4}$, de unde

$$2^{n+1}r-\frac{1}{2}<2t_n<2^{n+1}r+\frac{1}{2}.$$

Deoarece $2^{n+1}r-\frac{1}{4}<t_{n+1}<2^{n+1}r+\frac{1}{4}$ şi în intervalul $\left(2^{n+1}r-\frac{1}{2},2^{n+1}r+\frac{1}{2}\right)$ se află un singur număr întreg, rezultă $t_{n+1}=2t_n$. Deducem că $t_n=2^nt_0$, de unde

$$r-\frac{1}{4\cdot2^n}<t_0<r+\frac{1}{4\cdot2^n},$$

sau $|t_0-r|<\frac{1}{2^{n+2}}$, pentru orice n. Rezultă $r=t_0\in Z$

CLASA a XI-a

Subiectul 1.

Din $\det\left(A^2-I_4\right)<0$ rezultă $\det(A-I_4)\det(A+I_4)<0,$ ceea ce este echivalent cu $(-1)^8\det(I_4-A)\det(-I_4-A)<0.$ Considerând polinomul $p_A(t)=\det(tI_4-A),$ observăm că $p(1)p(-1)<0,$ deci există $\lambda\in(-1,1)$ astfel ca $p_A(\lambda)=0.$ De aici rezultă $\det(\lambda I_4-A)=0.$ Alegând $\alpha=-\lambda,$ rezultă $(-1)^4\det(A+\alpha I_4)=0,$ deci matricea $A+\alpha I_4$ este singulară.

Subiectul 2.

Considerând polinoamele $p_A(t)=\det(tI_3-A)$ şi $p_B(t)=\det(tI_3-B),$ deducem că $p_A(t)=p_B(t).$ Se arată că $tr\left(B^*\right)=\frac{1}{2}\left[\left(tr(B)\right)^2-tr\left(B^2\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\left(tr(A)\right)^2-tr\left(B^2\right)\right]$

Subiectul 3.

Din ipoteză rezultă $\left(1+\frac{1}{n}\right)^k\geq a,$ de unde $k\geq\frac{\ln a}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$ Prin urmare

$$k(n)=\left[\frac{\ln a}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]\quad\text{sau}\quad k(n)=\left[\frac{\ln a}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]+1.$$

Rezultă $\frac{\ln a}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\leq k(n)\leq\frac{\ln a}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}+1,$ ceea ce este echivalent cu

$$\frac{\ln a}{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\leq\frac{k(n)}{n}\leq\frac{\ln a}{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\frac{1}{n}.$$

Folosind criteriul cleştelui, obţinem $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{k(n)}{n}=\ln a.$

Subiectul 4.

Din ipoteză rezultă $f(x-r)<f(x)<f(x+r),$ pentru orice x∈R şi orice r∈R cu $r>0.$

Fie $x<y.$ Considerăm $a\in(x,y),$ α∈R Există un şir $(x_n)_{n\geq1}$ cu $x_n=x+r_n,$ unde $r_n\in R_+^*$ astfel încât $(x_n)_{n\geq1}$ tinde strict crescător către $a.$ De aici rezultă că şirul $\left(f(x_n)\right)_{n\geq1}$ tinde strict crescător către $f(a)$. Cum $f(x)<f(x_n),$ pentru orice $n,$ deducem că $f(x)<f(a).$ Analog demonstrăm că $f(a)<f(y).$ Prin urmare, pentru orice $x<y,$ avem $f(x)<f(y),$ deci f este strict crescătoare.

Subiectul 1.

Inegalitatea $\frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}} \le \frac{1}{(1+x^2)^n} \le \frac{x}{(1+x^2)^n}$, integrată, duce la

$$\lim_{n\to\infty} 2^n n a_n = 1.$$

Subiectul 2.

Fie q,r câtul, respectiv restul împărțirii în *R[X]* a lui $f - pX$ la g. Atunci *q,r*$\in$*Z[X]*, iar câtul şi restul împărţirii lui f la g sunt q, respectiv $r_1 = r + pX$. Astfel, dacă $g \mid f$, atunci $f = gq$, cu *q*$\in$*Z[X]*, deci, în acest caz, *p*$\in$*Z[X]*. De aici reiese $b = \pm 1$, deci rădăcinile x_1, x_2 ale polinomului g verifică relația $x_2 = \pm 1/x_1$. Există două cazuri.

Cazul 1: $b = 1$. În acest caz, $x_2 = 1/x_1$ şi, deoarece f are rădăcinile x_1, x_2, $x_1^n + px_1 - 1 = 0$ şi $1 + px_1^{n-1} - x_1^n = 0$, deci $px_1(x_1^{n-2} + 1) = 0$. Pentru $p \ne 0$ reiese $x_1^{n-2} + 1 = 0$ şi analog pentru x_2, de unde $|x_1| = |x_2| = 1$, deci $|a| \le 2$; aceeaşi ultimă concluzie se obține şi pentru $p = 0$. Analizând cele 5 cazuri, deducem că sunt posibile doar variantele $a = -1, g = X^2 - X + 1$, n=6k+5, k$\in$N, $n = 6k+5, k \in \square, p = -1$ şi *a=0, g=*X^2*+1, n=4k, k*$\in$*N***, p=0.*

Cazul 2: $b = -1$. Pentru n par, ținând cont că $x_2 = -1/x_1$ şi, procedând ca mai sus, obținem $px_1(x_1^{n-2} - 1) = 0$. Ecuația *X*^{2}*+aX-1, a*$\in$*Z* are rădăcini de modul 1 doar în cazul $a = 0$, deci $g \mid f$ doar pentru $a = 0$, ceea ce implică *p=0, n=2k, k*$\in$*N, k*$\ge$*2.*

Pentru n impar avem $x_1^n + px_1 - 1$ şi $x_1^n + px_1^{n-1} + 1 = 0$, de unde $px_1^{n-1} - px_1 + 2 = 0$, apoi $px_1^2 + (p^2 - 2)x_1 - p = 0$. Divizibilitatea cu $X^2 + aX - 1, a \in \square$ implică $p \mid p^2 - 2$; obținem $p \in \{-2, -1, 1, 2\}$. Pentru $p = -2$ sau $p = 1$ rezultă $a = -1, x_1 = (1+\sqrt{5})/2$, iar $n \ge 4 \Rightarrow x_1^n > 2x_1 + 1$, deci este posibilă doar situația $n = 3, p = -2$. Pentru $p = 2$ sau $p = -1$, raționând analog, obținem că nu există nicio posibilitate.

Deci, răspunsul este *(p=-1, n=6k+5), k*$\in$*N, k*$\ge$*2; (p=-1, n=2k), k*$\in$*N, k*$\ge$*2* sau $(p = -2, n = 3)$.

Subiectul 3.

Dacă există $x_0 \in (0,1), f(x_0) > 0$, atunci

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{nx}\mathrm{d}x = \int_0^{x_0} f(x)\mathrm{e}^{nx}\mathrm{d}x + \int_{x_0}^1 f(x)\mathrm{e}^{nx}\mathrm{d}x \ge f(x_0)\int_{x_0}^1 f(x)\mathrm{e}^{nx}\mathrm{d}x + f(0)\int_0^{x_0} f(x)\mathrm{e}^{nx}\mathrm{d}x$$

$$= f(x_0)\frac{e^n}{n} - f(x_0)\frac{e^{nx_0}}{n} + f(0)\frac{e^{nx_0}}{n} - \frac{f(0)}{n} = \frac{e^{nx_0}}{n}(e^{n(1-x_0} - 1 + f(0) - \frac{f(0)}{e^{nx_0}}) \to \infty,$$

fals. Aşadar $f(x) \le 0, x \in (0,1)$. Notăm $g = -f$; g este descrescătoare. Dacă $g(0+0) = 0$, atunci $g = 0$ şi $f = 0$ pe $(0,1)$. Dacă $g(0+0) = l > 0$, există $a \in (0,1)$ cu $g(x) > \frac{l}{2}, \forall x \in [0,a]$. Atunci

$$\int_0^1 g(x)\mathrm{e}^{nx}\mathrm{d}x \ge \int_0^a g(x)\mathrm{e}^{nx}\mathrm{d}x \ge \frac{e}{2}(\frac{e^{na}}{n} - 1) \to \infty,$$

fals. Deci $f(x) = 0, \forall x \in (0,1), f(0) = \alpha < 0, f(1) = \beta > 0.$

Subiectul 4.

Dacă x este nilpotent, atunci $1 - x$ este inversabil. Funcția $f(x) = 1 - x$, definită pe mulțimea elementelor nilpotente, are valori în mulțimea elementelor inversabile şi este injectivă, deci inversabilă. Din -1 inversabil urmează că 2 e nilpotent, adică $2^k = 0$. Atunci, orice element din grupul $(A,+)$ are ordin de forma 2^m, de unde cerința (argumentând, spre exemplu, cu teorema lui Cauchy).