Concursul Național „Al. Myller”
Ediția a VI - a
Iași, 2008

SUBIECTE

CLASA a VII-a

Subiectul 1.
Numerele reale distincte x, y, z au proprietatea că
$$x^3 - x = y^3 - y = z^3 - z.$$
Să se arate că $x + y + z = 0.$

Subiectul 2.
a) Să se arate că, dintre cinci numere naturale oarecare, se pot alege trei numere cu suma divizibilă cu 3.
b) Să se arate că, dintre 17 numere naturale oarecare, se pot alege nouă numere cu suma divizibilă cu 9.

Subiectul 3.
Fie AD înălțimea triunghiului ascuțitunghic ABC. Considerăm mulțimea M a punctelor $X \in (AD)$ cu proprietatea că $\angle ABX = \angle ACX.$
a) Să se arate că mulțimea M este nevidă.
b) Dacă M conține cel puțin două elemente, să se demonstreze că mulțimea M conține o infinitate de elemente.

Cristian Lazăr

Subiectul 4.
Fie segmentul AB și semidreapta $(Ox$, unde $O \in (AB)$ și $A, B \notin (Ox.$ Perpendicularele în A și B pe dreapta AB intersectează bisectoarele $(Oy$ și $(Oz$ ale unghiurilor $\angle AOx$ și $\angle BOx$ în punctele M, respectiv N. Perpendiculara din A pe $(Oy$ intersectează perpendiculara din B pe $(Oz$ în punctul P. Să se arate că punctele M, N, P sunt coliniare.

Mircea Fianu

Concursul Național „Al. Myller”
Ediția a VI - a
Iași, 2008

SUBIECTE

CLASA a VIII-a

Subiectul 1.
Considerăm cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi M, N, P mijloacele muchiilor AB, AD, respectiv AA'. Să se determine măsura unghiului dintre dreapta $A'C'$ şi dreapta de intersecție a planelor (MNP) şi (BCC').

Subiectul 2.
Fie a,b numere întregi distincte cu proprietatea că există n număr real astfel încât $a^3 - a = b^3 - b = n.$ Să se arate că $n = 0$.

Subiectul 3.
Se dau şase puncte în plan, oricare trei necoliniare. Considerăm zece segmente, fiecare având capetele în câte două dintre aceste puncte. Să se arate că există cel puțin un triunghi având ca laturi trei dintre cele zece de segmente.

Subiectul 4.
Fie $SABC$ un tetraedru regulat. Punctele A_1, B_1, C_1 aparțin muchiilor (SA), (SB), (SC), respectiv, astfel încât $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1$. Să se arate că planele $(A_1B_1C_1)$ şi (ABC) sunt paralele.

Concursul Național „Al. Myller”
Ediția a VI - a
Iaşi, 2008

SUBIECTE

CLASA a IX-a

Subiectul 1.

Determinați numărul soluțiilor ecuației $\frac{[x]}{\{x\}}=\frac{2007x}{2008}$.

Mihail Bălună

Subiectul 2.

Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x^6+x^5+4=y^2$.

Ioan Cucurezeanu

Subiectul 3.

Fie $ABCDE$ un pentagon convex. Demonstrați că

$$\frac{\text{aria}(ABC)}{\text{aria}(ABCD)}+\frac{\text{aria}(CDE)}{\text{aria}(BCDE)}<1.$$

Dan Ismailescu

Subiectul 4.

Fie C_1, C_2 două cercuri concentrice distincte şi $[AB]$ un diametru al cercului C_1. Considerăm două puncte variabile $M\in C_1, N\in C_2$, nesituate pe dreapta AB.

a) Arătați că există şi sunt unic determinate punctele P, Q, situate pe dreptele MA, respectiv MB, astfel încât N să fie mijlocul segmentului $[PQ]$.

b) Arătați că suma AP^2+BQ^2 este constantă, unde P, Q sunt definite la punctul a).

Mihai Piticari, Mihail Bălună

Concursul Național „Al. Myller”
Ediția a VI - a
Iași, 2008

SUBIECTE

CLASA a X-a

Subiectul 1.
Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și A_1 punctul de pe cerc diametral opus lui A. Notăm cu G, G_1 centrele de greutate al triunghiurilor ABC și A_1BC și cu P intersecția dreptelor AG_1 și OG. Să se arate că $\frac{PG}{PO} = \frac{2}{3}$.

Gabriel Popa, Paul Georgescu

Subiectul 2.
Să se arate că nu există numere întregi a, b, c astfel încât $(a + bi\sqrt{3})^{17} = c + i\sqrt{3}$.

Dorin Andrica, Mihai Piticari

Subiectul 3.
Să se determine poligoanele convexe, inscriptibile, cu proprietatea că orice triunghi determinat de trei dintre vârfurile acestora este isoscel.

Gheorghe Iurea

Subiectul 4.
Fie r un număr real, cu proprietatea

$$\left(2^n r - \frac{1}{4}, 2^n r + \frac{1}{4}\right) \cap \mathrm{Z} \neq \varnothing$$

pentru orice $n \in N$. Să se arate că r este număr întreg.

Ciprian Baghiu

Concursul Național „Al. Myller”
Ediția a VI - a
Iaşi, 2008

SUBIECTE

CLASA a XI-a

Subiectul 1.

Fie $A \in M_4(R)$ astfel încât $det(A^2 - I_4) < 0$.
Să se arate că există $\alpha \in R$, cu $|\alpha| < 1$ astfel încât matricea $A + \alpha I_4$ să fie singulară.

Mihai Haivas

Subiectul 2.

Fie $A, B, S \in M_3(C)$, S fiind o matrice nesingulară încât $B = S^{-1}AS$. Să se arate că

$$tr(B^2= \ + 2\, tr(B^*) = (tr(A))^2 .$$

Mihai Haivas

Subiectul 3.

Fie $a > 1$ un număr real. Pentru fiecare număr natural nenul n notăm prin $k(n)$ cel mai mic număr natural k pentru care

$$(n+1)^k \geq an^k .$$

Să se calculeze

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{k(n)}{n} .$$

Neculai Hârțan

Subiectul 4.

Fie $f : R \to R$ o funcție continuă pe Q, cu proprietatea

$$f(x) < f\left(x + \frac{1}{n}\right)$$

pentru orice $x \in R$ şi orice $n \in N^*$.
Să se demonstreze că f este strict crescătoare pe R.

Gabriel Mârşanu, Mihai Piticari

Concursul Naţional „Al. Myller”
Ediţia a VI - a
Iaşi, 2008

SUBIECTE

CLASA A XII-A

Subiectul 1.
Se consideră şirul $(a_n)_{n\in N^*}$

$$a_n = \int_1^n \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} n2^n a_n$

Bogdan Enescu

Subiectul 2.
Determinaţi numerele $n \in N, n \geq 3$ şi $a \in R$ pentru care polinomul $X^n + aX - 1$ are un divizor de foma $X^2 + \alpha X + \beta$ cu α, β $\in Z$.

Mihail Bălună

Subiectul 3.
Determinaţi funcţiile crescătoare $f:[0,1] \to R$ pentru care

$$\left|\int_0^1 f(x)e^{nx}dx\right| \leq 2008$$

pentru orice n $\in$ N.

Mihai Piticari

Subiectul 4.
Fie A un inel finit în care numărul elementelor inversabile este egal cu numărul elementelor nilpotente. Să se arate că numărul elementelor inelului este o putere a lui 2.

(Un element x $\in$ A se numeste nilpotent dacă există k natural cu $x^k = 0$.)

Dinu Şerbănescu