

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 10 martie 2018
CLASA a VI-a
Varianta 2

Soluții și baremuri orientative

Problema 1. Numerele naturale x, y, z satisfac egalitatea

$$13x + 8y = 5z.$$

Demonstrați că numărul $(x + y)(y + z)(z + x)$ este divizibil cu 130.

Soluție și barem: Din egalitatea $13x + 8y = 5z$, obținem $13x + 13y = 5z + 5y$, adică $13(x + y) = 5(z + y)$. Deoarece numerele 13 și 5 sunt prime, obținem că $(x + y) : 5$ și $(y + z) : 13$ **4p**

Din ipoteză, obținem $13x + 8y = 5z + 5x$, adică $5(z + x) : 2$, de unde $(z + x) : 2$. .. **2p**
Deoarece $130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$, rezultă concluzia. **1p**

Problema 2. Un tablou de formă pătrată se împarte în 100 pătrățele identice, distribuite pe 10 linii și 10 coloane. Avem la dispoziție 10 cartonașe, numerotate diferit, cu cifre de la 0 la 9. Pe tablou trebuie să așezăm două cartonașe, având suma 10, în pătrățele situate pe linii și coloane diferite. Determinați numărul de posibilități de așezare a acestor cartonașe.

Soluție și barem: Deoarece suma cifrelor trebuie să fie egală cu 10, există doar 4 perechi de cartonașe care se pot plasa pe tablou. **1p**

Primul cartonaș se poate plasa în orice pătrățel, deci există 100 variante. Pentru al doilea cartonaș mai rămân 9 linii și 9 coloane la dispoziție, adică 81 de variante. Prin urmare avem $100 \times 81 = 8100$ variante de plasare a unei perechi de cartonașe. **4p**

Deoarece avem 4 perechi, atunci avem în total $4 \times 8100 = 32400$ variante. **2p**

Problema 3. În triunghiul ascuțitunghic ABC , cu $AB < AC$, AD este înălțime, iar AE este bisectoare, unde $D, E \in (BC)$. În triunghiul ascuțitunghic $A'B'C'$, cu $A'B' < A'C'$, $A'D'$ este înălțime, iar $A'E'$ este bisectoare, unde $D', E' \in (B'C')$. Se știe că $[AB] \equiv [A'B']$, $[AD] \equiv [A'D']$ și $[AE] \equiv [A'E']$. Demonstrați că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt congruente.

Soluție și barem: Deoarece $\triangle ABD \equiv \triangle A'B'D'$, conform cazului $C.I.$, obținem $\angle B \equiv \angle B'$ (*) și $\angle BAD \equiv \angle B'A'D'$ **3p**

Pe de altă parte, $\triangle DAE \equiv \triangle D'A'E'$ ($C.I.$), de unde $\angle DAE \equiv \angle D'A'E'$ **1p**

Suntem conduși la $\angle BAE \equiv \angle B'A'E'$, de unde obținem $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ **2p**

Ținând cont de (*), rezultă că $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, conform cazului $U.L.U.$ **1p**

Problema 4. Lucia are în total 2018 bile galbene, albastre și verzi. Numărul bilelor verzi este de 4 ori mai mare decât numărul bilelor albastre. La un schimb, Lucia oferă

prietenei sale Cristina 13 bile galbene și primește 5 bile albastre și 7 bile verzi. După mai multe astfel de schimburi, Lucia rămâne fără bile galbene, dar cu 1271 bile verzi. Determinați numărul de bile galbene avute inițial de Lucia?

Soluție și barem: Notăm cu k numărul de schimburi efectuate între cele două prietene. Atunci numărul de bile galbene este $13k$ **1p**

Numărul inițial de bile albastre este $\frac{2018 - 13k}{5}$, iar numărul inițial de bile verzi este

$\frac{4(2018 - 13k)}{5}$ **2p**

Numărul final de bile verzi este $\frac{4(2018 - 13k)}{5} + 7k = 1271$,

de unde se obține $k = 101$ **3p**

Obținem că Lucia a avut inițial 1313 bile galbene. **1p**