

Olimpiada Națională de Matematică 2026
Etapa locală - Iași, 30 ianuarie 2026
Clasa a X-a
Barem de notare și evaluare

Se acordă **10 puncte** din oficiu.

Problema 1.

Demonstrați că

a) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10} = 2;$

b) $\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \dots + \sqrt[3]{6}}} < 2,$ unde avem n radicali, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

Soluție:

<p>a) Fie $x = \sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$. Prin ridicare la puterea a treia obținem $x^3 = 20 - 6x$. $x^3 + 6x - 20 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 10) = 0$. Cum $x^2 + 2x + 10 = (x+1)^2 + 9 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, avem $x^3 + 6x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Așadar, $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10} = 2$.</p>	6p
<p>b) Demonstrăm, prin inducție, propoziția: $P(n): \underbrace{\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \dots + \sqrt[3]{6}}}}_{n \text{ radicali}} < 2, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. $P(2): \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6}} < 2 \Leftrightarrow 6 + \sqrt[3]{6} < 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{6} < 2 \Leftrightarrow 6 < 8$, adevărat. Presupunem $P(k)$ adevărată, $k \in \mathbb{N}, k \geq 2, k$ fixat arbitrar. Deoarece $6 + \underbrace{\sqrt[3]{6 + \dots + \sqrt[3]{6}}}_{k \text{ radicali}} < 6 + 2 = 8$, avem $\underbrace{\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \dots + \sqrt[3]{6}}}}_{k+1 \text{ radicali}} < \sqrt[3]{8} = 2$, deci $P(k+1)$ este adevărată. Prin urmare, $P(n)$ este adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.</p>	6p

Problema 2.

Demonstrați că $\left| \frac{6z-i}{2+3iz} \right| \leq 1$ dacă și numai dacă $|z| \leq \frac{1}{3}$, unde i este unitatea imaginară și $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{2i}{3} \right\}$.

Soluție:

$\left \frac{6z-i}{2+3iz} \right \leq 1 \Leftrightarrow 6z-i \leq 2+3iz \Leftrightarrow 6z-i ^2 \leq 2+3iz ^2 \Leftrightarrow$	6p
$(6z-i)(6\bar{z}+i) \leq (2+3iz)(2-3i\bar{z}) \Leftrightarrow$	6p
$z\bar{z} \leq \frac{1}{9} \Leftrightarrow z ^2 \leq \frac{1}{9} \Leftrightarrow z \leq \frac{1}{3}$	10p

Problema 3. Determinați toate funcțiile $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică simultan următoarele condiții:

(1) $f(x) \leq \ln x, \forall x \in (0, +\infty);$

(2) $f(xy) \leq f(x) + f(y), \forall x, y \in (0, +\infty).$

Soluție:

<p>Fie f o funcție care îndeplinește condițiile din enunț. Demonstrăm că $f(x) = \ln x, \forall x \in (0, +\infty)$. Prin reducere la absurd, presupunem că există $x_0 \in (0, +\infty)$ astfel încât $f(x_0) \neq \ln x_0$. Conform condiției (1), rezultă că $f(x_0) < \ln x_0$.</p>	7p
---	-----------

<p>Luând $y = x_0$ în condiția (2), obținem $f(xx_0) \leq f(x) + f(x_0) < \ln x + \ln x_0 = \ln(xx_0)$, $\forall x \in (0, +\infty)$, de unde înlocuind pe x cu $\frac{x}{x_0}$ deducem că (3) $f(x) < \ln x$, $\forall x \in (0, +\infty)$.</p> <p>Luând $x = y = 1$ în relația (2), rezultă $f(1) \leq f(1) + f(1)$, deci $f(1) \geq 0$ și luând $x = 1$ în relația (3) obținem $f(1) < \ln 1 = 0$, relații care se contrazic.</p> <p>Deci, presupunerea că există $x_0 \in (0, +\infty)$ astfel încât $f(x_0) \neq \ln x_0$ este falsă.</p> <p>Prin urmare, $f(x) = \ln x$, $\forall x \in (0, +\infty)$, funcție care verifică toate condițiile cerute.</p>	<p>7p</p> <p>9p</p>
--	-----------------------------------

Problema 4. Se consideră un triunghi ABC și un sistem de coordonate xOy , cu originea în centrul cercului circumscriș acestui triunghi.

- a) Demonstrați că ortocentrul H al triunghiului ABC are afixul $h = a + b + c$, unde a, b, c sunt afixele vârfurilor A, B, C (în raport cu sistemul xOy considerat).
- b) Fie S cercul circumscriș triunghiului ABC și S_{AB}, S_{BC}, S_{CA} cercurile simetrice cercului S față de dreptele AB, BC , respectiv CA . Demonstrați că cercurile S_{AB}, S_{BC}, S_{CA} au un punct comun.

Soluție:

<p>a) Punctul diametral opus lui A în cercul circumscriș triunghiului ABC îl notăm cu A' și are afixul $-a$. Deoarece $BH \perp AC$ și $A'C \perp AC$, rezultă $BH \parallel A'C$. Analog $CH \parallel A'B$. Rezultă că $A'BHC$ este paralelogram, deci segmentele BC și $A'H$ au același mijloc M. Obținem $h - a = b + c$, deci $h = a + b + c$.</p>	<p>11p</p>
<p>b) Dacă cercurile S și S_{BC} sunt simetrice față de latura BC, iar O și O_1 sunt respectiv centrele lor, atunci OBO_1C este romb, deci $0 + o_1 = b + c$, o_1 fiind afixul punctului O_1. Prin urmare, $o_1 = b + c$. Analog, centrele cercurilor S_{CA} și S_{AB}, punctele O_2 și O_3, au afixele $o_2 = a + c$, respectiv $o_3 = a + b$. Trebuie să găsim un punct $P(p)$ egal depărtat de O_1, O_2, O_3, adică (1) $p - (b + c) = p - (a + c) = p - (a + b)$. Observăm că ortocentrul triunghiului ABC, $H(a + b + c)$, verifică relația (1). Deci cercurile S_{AB}, S_{BC}, S_{CA} au punctul comun $P = H$.</p>	<p>12p</p>