Olimpiada Națională de Matematică 2026

Etapa locală - Iași, ianuarie 2026

Clasa a XII–a

Barem de notare și evaluare

Problema 1. *Pe mulțimea numerelor reale* $\mathbb{R}$ *definim operația asociativă*

$$x \circ y = 8\left(x+\frac{1}{8}\right)\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}.$$

a) *Determinați elementele egale cu simetricele lor față de operația „ $\circ$ ”.*

b) *Demonstrați că* $\frac{1}{8}\circ\frac{2}{8}\circ\ldots\circ\frac{n}{8}=\frac{(n+1)!-1}{8}$, *pentru orice număr natural* $n \geq 2$.

Soluție. a) Elementul neutru este $e=0$. **5p**

$x \circ x = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{8}\right)^2=\frac{1}{64} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}$ sau $x=0$. **5p**

b) Demonstrăm prin inducție $P(n)$: $\frac{1}{8}\circ\frac{2}{8}\circ\ldots\circ\frac{n}{8}=\frac{(n+1)!-1}{8}$, $n \geq 2$.

Deoarece $\frac{1}{8}\circ\frac{2}{8}=8\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)\left(\frac{2}{8}+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}=\frac{2\cdot 3-1}{8}=\frac{3!-1}{8}$, rezultă că $P(2)$ este adevărată. **5p**

Presupunem că $P(k)$ este adevărată pentru un număr natural $k \geq 2$. Avem:

$$\frac{1}{8}\circ\frac{2}{8}\circ\ldots\circ\frac{k}{8}\circ\frac{k+1}{8}=\frac{(k+1)!-1}{8}\circ\frac{k+1}{8}=8\left(\frac{(k+1)!-1}{8}+\frac{1}{8}\right)\left(\frac{k+1}{8}+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}=8\cdot\frac{(k+1)!}{8}\cdot\frac{k+2}{8}-\frac{1}{8}=$$

$\frac{(k+2)!-1}{8}$, deci $P(k+1)$ este adevărată.

Prin urmare, $P(n)$ este adevărată, pentru orice $n \geq 2$. **8p**

Problema 2. *Se consideră funcția* $f_n:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\int_0^x t^n \operatorname{arctg} t \, \mathrm{d}t$, *unde* $n \in \mathbb{N}^*$.

a) *Determinați* $f_1(x), x\in(0,+\infty)$.

b) *Calculați* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1)$.

c) *Demonstrați că* $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, f_n(1)=\frac{\pi}{4}$.

Soluție. a) $f_1(x)=\int_0^x t \operatorname{arctg} t\, \mathrm{d}t=\frac{t^2}{2}\operatorname{arctg} t\Big|_0^x-\int_0^x\frac{t^2}{2}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{arctg} x}{2}$. **8p**

b) $0 \leq f_n(1)=\int_0^1 t^n \operatorname{arctg} t\,\mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{4}\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1)=0$. **5p**

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

c) $f_n(1)=\int_0^1\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)'\operatorname{arctg} t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t^2}\mathrm{d}t$. **4p**

Cum $0\le\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t^2}\mathrm{d}t\le\int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+2}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t^2}\mathrm{d}t=0$, ... **4p**

deci $\lim\limits_{n\to+\infty} nf_n(1)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}\frac{n}{n+1}-\frac{n}{n+1}\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t^2}\mathrm{d}t\right)=\frac{\pi}{4}$. **2p**

Problema 3. *Dată funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definim pe mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale operația „$*$” prin*

$$x*y=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Determinați funcția f știind că $(\mathbb{R},*)$ este grup abelian cu proprietatea că simetricul oricărui element $x\in[-1,1]$ este un element $x'\in[-1,1]$.

Soluție. Notăm cu e elementul neutru al grupului $(\mathbb{R},*)$. Din $x=x*e,\forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că $f(x)=x-f(e),\forall x\in\mathbb{R}$. …………………………………………………………………….. **5p**

Pentru $x=e$ obținem $f(e)=\frac{e}{2}$, așadar $f(x)=x-\frac{e}{2},\forall x\in\mathbb{R}$. …………………………......... **5p**

Deoarece $x*x'=e$, avem că $f(x)+f(x')=e$, prin urmare $x'=2e-x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$. …. **5p**

Pentru $x=1$ obținem că $x'=2e-1\in[-1,1]$, de unde $e\in[0,1]$.

Pentru $x=-1$ obținem că $x'=2e+1\in[-1,1]$, de unde $e\in[-1,0]$.

În concluzie $e=0$, deci $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$. **5p**

Această funcție verifică toate condițiile din ipoteza problemei. **2p**

Problema 4. *Fie $0\le a<b$ două numere reale și $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe $[a,b]$, cu derivata a doua continuă. Dacă*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(a^2f'(a)-b^2f'(b)\right)+bf(b)-af(a),$$

arătați că există $c\in(a,b)$ pentru care $f''(c)=0$.

Soluție. Avem:

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=xf(x)\big|_a^b-\int_a^b xf'(x)\mathrm{d}x=$ **5p**

$=bf(b)-af(a)-\left[\frac{x^2}{2}f'(x)\big|_a^b-\int_a^b\frac{x^2}{2}f''(x)\mathrm{d}x\right]=$... **4p**

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

$= bf(b) - af(a) + \frac{1}{2}\left(a^2 f'(a) - b^2 f'(b)\right) + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{x^2}{2} f''(x)\,\mathrm{d}x$. Ținând seama de ipoteză, rezultă că

$\int_a^b x^2 f''(x)\,\mathrm{d}x = 0.$ **3p**

Conform teoremei de medie, există $c \in (a, b)$ pentru care $\int_a^b x^2 f''(x)\,\mathrm{d}x = c^2 f''(c)(b-a)$. **5p**

Cum $c \neq 0,\ b - a \neq 0$ (deoarece $0 \le a < c < b$), urmează că $f''(c) = 0$. **5p**

Se adaugă 10 puncte din oficiu
Orice altă soluție corectă va fi punctată corespunzător

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro