Olimpiada Națională de Matematică 2026

Etapa locală - Iași, 30 ianuarie 2026

Clasa a VI–a

Barem de notare și evaluare

Problema 1.

a) Aflați numerele naturale consecutive $x < y < z < t < u$, astfel încât numărul $n = \frac{x+y+z+t}{u}$ să fie număr natural impar.

(adaptare supliment *Gazeta Matematică nr. 9/2025*)

b) Fie $A = \left\{\frac{2035}{10}, \frac{2036}{11}, \frac{2037}{12}, \ldots\right\}$. Determinați cardinalul mulțimii $A \cap \mathbb{N}$.

(*Gazeta Matematcă nr. 9/2025*)

Soluție:

a) Fie $y = x + 1, z = x + 2, t = x + 3, u = x + 4$.. ***1p***

Atunci, $n = \frac{4x+6}{x+4}$ ***1p***

$n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (x + 4)/(4x + 6)$..***2p***

Avem $(x + 4)/(x + 4)$ și $(x + 4)/(4x + 6)$, iar de aici rezultă că $(x + 4)/10$...........................***4p***

Așadar, $(x + 4) \in \{1,2,5,10\}$, și cum *x* este număr natural, va rezulta că $x \in \{1,6\}$.....................***1p***

Dacă $x = 1 \Rightarrow n = \frac{10}{5} = 2$, care este număr par, nu convine..***2p***

Dacă $x = 6 \Rightarrow n = \frac{30}{10} = 3$ număr natural impar, convine..***2p***

Numerele sunt $x = 6, y = 7, z = 8, t = 9, u = 10$..***1p***

b) Un element oarecare al mulțimii *A* este de forma $\frac{2025+k}{k}$, unde $k \in \mathbb{N}, k \geq 10$......................***2p***

$\frac{2025+k}{k} = 1 + \frac{2025}{k} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow k/2025 \Longrightarrow k \in D_{2025}$ și $k \geq 10$..***3p***

Cum $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, numărul divizorilor săi este egal cu $5 \cdot 3 = 15$..***2p***

Dacă vom exclude numerele 1, 3,5 și 9, obținem 11 valori posibile pentru numărul *k*, adică sunt 11 fracții care aparțin mulțimii *A* și sunt numere naturale, deci $card(A \cap \mathbb{N}) = 11$..........***4p***

Problema 2. a) Determinați numerele naturale *n* pentru care $2^n - 1$și $2^n + 1$ sunt simultan prime.

b) Determinați numerele naturale *a* și *b*, pentru care $(a,b) = 5$ și $[a,b] = (2a,3b)$, unde (a,b)și $[a,b]$ reprezintă cel mai mare divizor comun, respectiv cel mai mic multiplu comun al numerelor *a* și *b*.

Soluție:

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

a) Știind că având trei numere consecutive $2^n-1, 2^n, 2^n+1$, unul dintre ele este divizibil cu 3 și cum 2^n nu poate fi divizibil cu 3, rezultă că unul dintre celelalte două este divizibil cu 3…………………..…**3p**

Fiind vorba de numere prime analizăm cazurile :

Cazul I: $2^n-1=3 \Rightarrow n=2$, iar în acest caz $2^n+1=5$, ceea ce convine …………………………**2p**

Cazul al II-lea : $2^n+1=3 \Rightarrow n=1$ și atunci $2^n-1=1$, nu convine……………………………….**2p**

b) Fie $a=5x,\ b=5y$, unde $(x,y)=1$, iar $[a,b]=5xy=ay=bx$ ……………………………………**2p**

$[a,b]\,|\,2a \Rightarrow ay\,|\,2a \Rightarrow y\,|\,2$, analog $x\,|\,3$ ……………………………………………………**2p**

I) $x=y=1 \Rightarrow a=b=5 \Rightarrow [a,b]=(2a,3b)=5$ ……………………………………………**2p**

II) $x=1, y=2 \Rightarrow a=5, b=10$ și $[a,b]=10$ iar $(2a,3b)=(10,30)=10$, verifică......................**2p**

III) $x=3, y=1 \Rightarrow a=15, b=5 \Rightarrow [a,b]=15$ și $(2a,3b)=(30,15)=15$,verifică.......................**2p**

IV) $x=3, y=2 \Rightarrow a=15, b=10 \Rightarrow [a,b]=30$ iar $(2a,3b)=(30,30)=30$, verifică...............**2p**

Soluția este $(5;5),(5;10),(15;5),(15;10)$ ……………………………………………………………**1p**

Problema 3. Fie numerele naturale nenule x, y, z astfel încât $x^2+y^2+z^2=2026$, iar numerele x, y și $3z$ sunt direct proporționale cu numerele $x+26, y+14$ și $3z+16$. Determinați numerele x, y și z.

Soluție:

Din directa proporționalitate, obținem:

$\frac{x}{x+26}=\frac{y}{y+14}=\frac{3z}{3z+16}$..**2p**

Inversând relațiile anterioare, obținem:

$\frac{x+26}{x}=\frac{y+14}{y}=\frac{3z+16}{3z} \Rightarrow 1+\frac{26}{x}=1+\frac{14}{y}=1+\frac{16}{3z}$..**3p**

Prin urmare, obținem:

$\frac{26}{x}=\frac{14}{y}=\frac{16}{3z} \Rightarrow \frac{x}{26}=\frac{y}{14}=\frac{3z}{16}$..**3p**

Notând ultimul raport cu k, obținem: $x=26k, y=14k$ și $z=\frac{16k}{3}$..**3p**

Atunci

$2026=x^2+y^2+z^2=(26k)^2+(14k)^2+\left(\frac{16k}{3}\right)^2=676k^2+196k^2+\frac{256k^2}{9}$, de unde

$2026=872k^2+\frac{256k^2}{9}=\frac{8104k^2}{9}=\frac{2026\cdot 4\cdot k^2}{9}$...**3p**

Obținem astfel $2026\cdot 9=2026\cdot 4\cdot k^2 \Rightarrow k^2=\frac{9}{4}$. Cum $x, y, z \in N^*$, atunci $k=\frac{3}{2}$..................**3p**

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Prin urmare, vom avea

$$\frac{x}{26} = \frac{y}{14} = \frac{3z}{16} = \frac{3}{2},$$

de unde obținem

$x = \frac{3\cdot 26}{2} = 39, y = \frac{14\cdot 3}{2} = 21, z = \frac{16}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{16}{2} = 8$ ***3p***

Problema 4. În interiorul unghiului $\widehat{AOB}$ cu măsura de 140^0, se consideră punctele *C* și *D*, astfel încât punctul *C* aparține interiorului unghiului $\widehat{AOD}$.

Se știe că $2\cdot m(\widehat{COD}) = 3\cdot m(\widehat{AOC})$ și că $3\cdot m(\widehat{BOC}) = 5\cdot m(\widehat{COD})$.

a) Arătați că $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{BOD})$.

b) Demonstrați că unghiurile $\widehat{AOB}$ și $\widehat{COD}$ au aceeași bisectoare.

c) Dacă $(OM$ este bisectoarea unghiului $\widehat{COD}$ și $(ON \perp (OM$, calculați $m(\widehat{AON})$.

Soluție: a) Din egalitatea $2\cdot m(\widehat{COD}) = 3\cdot m(\widehat{AOC}) \Rightarrow m(\widehat{AOC}) = \frac{2}{3}\cdot m(\widehat{COD})$..................***1p***

Din egalitatea $3\cdot m(\widehat{BOC}) = 5\cdot m(\widehat{COD}) \Rightarrow m(\widehat{BOC}) = \frac{5}{3}\cdot m(\widehat{COD})$....................................***2p***

$m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{AOB}) = 140^0 \Rightarrow \frac{2}{3}\cdot m(\widehat{COD}) + \frac{5}{3}\cdot m(\widehat{COD}) = 140^0$,

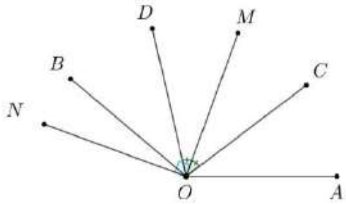
de unde obținem că $m(\widehat{COD}) = 60^0$..***4p***

Așadar, $m(\widehat{AOC}) = 40^0$ și $m(\widehat{BOD}) = 40^0$, deci $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{BOD})$....................................***2p***

b)Fie $(OM$ bisectoarea unghiului $\widehat{COD} \Rightarrow \widehat{COM} \equiv \widehat{MOD}$, și cum $\widehat{AOC} \equiv \widehat{BOD}$, va rezulta că $\widehat{AOM} \equiv \widehat{MOB}$, deci semidreapta $(OM$ este și bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$.................................. ***4p***

c)Vom analiza două cazuri:

Cazul I : *N* și *B* sunt situate de aceeași parte a dreptei *OA*

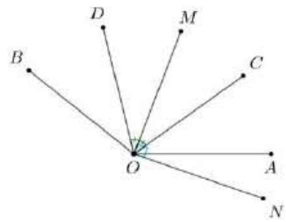


În acest caz,

$m(\widehat{AON}) = m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{MOC}) + m(\widehat{MON})$

$m(\widehat{AON}) = 40^0 + 30^0 + 90^0 = 160^0$...***6p***

Cazul al II lea : *N* și *B* sunt situate de o parte și de alta a dreptei *OA*



În acest caz,

$m(\widehat{AON}) = m(\widehat{MON}) - m(\widehat{MOC}) - m(\widehat{COA})$

$m(\widehat{AON}) = 90^0 - 30^0 - 40^0 = 20^0$...***6p***

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro