Olimpiada Națională de Matematică 2026

Etapa locală - Iași, 30 ianuarie 2026

Clasa a IX–a

Barem de notare și evaluare

Se acordă 10 puncte din oficiu

Problema 1. (22 de puncte)

Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice numere reale $x_1, x_2, ..., x_n$, are loc inegalitatea

$[x_1]^2 + [x_2]^2 + ... + [x_n]^2 + 3n > 2(x_1 + x_2 + ... + x_n)$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Gazeta Matematică 11/2025 (Supliment)

Soluție:

Vom folosi relațiile: $x_i = [x_i] + \{x_i\}$ și $0 \le \{x_i\} < 1$, oricare ar fi $x_i \in \mathbb{R}$ și $i \in \{1, 2, ..., n\}$ 3p

Inegalitatea de demonstrat devine : $\left([x_1]^2 - 2[x_1] + 1\right) + ... + \left([x_n]^2 - 2[x_n] + 1\right) > 2\left(\{x_1\} + ... + \{x_n\}\right) - 2n$ 6p

Se obține **(1)** $\left([x_1] - 1\right)^2 + ... + \left([x_n] - 1\right)^2 > 2\left(\{x_1\} - 1\right) + ... + 2\left(\{x_n\} - 1\right)$ 9p

Relația **(1)** este adevărată întrucât $\left([x_i] - 1\right)^2 \ge 0$, iar $\{x_i\} - 1 < 0$, pentru orice $x_i \in \mathbb{R}$ și $i \in \{1, 2, ..., n\}$ …4p

Problema 2. (23 de puncte)

Se consideră un triunghi ABC în care punctele D, E și F sunt mijloacele laturilor BC, AC, respectiv AB. Dacă M este un punct oarecare în planul triunghiului, demonstrați că paralela prin D la dreapta MA, paralela prin E la dreapta MB și paralela prin F la dreapta MC sunt trei drepte concurente.

Soluție :

Pentru un punct O arbitrar fixat în plan, vom identifica un punct P astfel încât $DP \parallel MA, EP \parallel MB$ și $FP \parallel MC$ sau echivalent...4p

$DP \parallel MA \Leftrightarrow \overrightarrow{DP} = x \cdot \overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OP} = x \cdot \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = -x \cdot \overrightarrow{OM} + x \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OC}$ ……...3p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

$EP \parallel MB \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = -y \cdot \overrightarrow{OM} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OC}$ ………………… ……..…………………………..3p

$FP \parallel MC \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = -z \cdot \overrightarrow{OM} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}$, unde $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ ……………….………………..…….3p

Alegând $x = y = z = \frac{1}{2}$, rezultă că $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OM} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OM} + \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{OG}$, astfel că existența punctului de concurență, P, este asigurată……………………………………………………….……10p

Observatie: Se deduce că $\overrightarrow{MG} = 2 \cdot \overrightarrow{GP}$, deci punctele M, G, P sunt coliniare și $MG = 2GP$.

Problema 3. (23 de puncte)

Să se demonstreze inegalitățile:

a) $\frac{x}{y+z} \le \frac{1}{4}\left(\frac{x}{y} + \frac{x}{z}\right)$, oricare ar fi $x, y, z \in (0, \infty)$.

b) $\frac{2a}{a^2+bc} + \frac{2b}{b^2+ca} + \frac{2c}{c^2+ab} \le \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}$, oricare ar fi $a, b, c \in (0, \infty)$.

Soluție:

a) $\frac{x}{y+z} \le \frac{1}{4}\left(\frac{x}{y} + \frac{x}{z}\right) \Leftrightarrow x \cdot (y-z)^2 \ge 0$ …………………………………………………....... .... 6p

b) Folosind punctul anterior, deducem că: $\frac{2a}{a^2+bc} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{bc}\right)$, $\frac{2b}{b^2+ca} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{b}{ca}\right)$ și

$\frac{2c}{c^2+ab} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} + \frac{c}{ab}\right)$…… ……………………………………………………………………...6p

Adunând relațiile anterioare rezultă : $\frac{2a}{a^2+bc} + \frac{2b}{b^2+ca} + \frac{2c}{c^2+ab} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right)$ (1)

………...4p

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \Leftrightarrow ab + ac + bc \le a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0$ (**2**)……….......4p

Din relațiile (1) și (2) rezultă cerința.……………………………………………………………………3p

Problema 4. (22 de puncte)

a) Dacă x și y sunt numere naturale nenule astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$, demonstrați că $x = y$.

b) Determinați numerele naturale nenule a, b, c știind că $a < b < c$ și $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

c) Fie n număr natural, $n \geq 3$. Demonstrați că există numerele naturale nenule $a_1 < a_2 < ... < a_n$ astfel încât $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} = 1$.

Soluție:

a) $x = y = 2$ ……………………………………………………………………………………4p

b) $a = 1$ nu convine. Dacă $a \geq 3$, rezultă că $b \geq 4, c \geq 5$ și $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{47}{60}$, nu convine.

Pentru $a = 2$, rezultă că $b = 3,\ c = 6$ ……………………………………………………………6p

c) Pentru $n = 3$, am găsit la punctul anterior tripletul $a_1 = 2, a_2 = 3$ și $a_3 = 6$.

Inductiv, admițând că pentru $n = k$, avem $a_1 < a_2 < ... < a_k$ și $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k} = 1$, construim pentru $n = k + 1$ numerele naturale $x_1 < x_2 < ... < x_{k+1}$, astfel : înmulțim cu $\frac{1}{2}$ egalitatea $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k} = 1$ și, ulterior, adunăm $\frac{1}{2}$ egalității nou obținute. Va rezulta $\frac{1}{2} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + ... + \frac{1}{2a_k} = 1$, deci $x_1 = 2, x_2 = 2a_1, ..., x_{k+1} = 2a_k$ sunt numerele căutate…………………………………………………...12p

Notă
Orice rezolvare corectă, diferită de barem, va primi punctajul corespunzător.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro