CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
Ediția a XXVIII-a
ETAPA LOCALĂ – 30 ianuarie 2026

Clasa a XI–a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (20 puncte)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

a) Aflați matricea $X\in M_{3,1}(R)$ pentru care $AX=B$.

b) Să se calculeze A^{2026} .

SOLUȚIE:

a) Notăm cu $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ matricea necunoscută și avem $\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ 3p

Se scrie sistemul de ecuații corespunzător: $\begin{cases}x+y+2z=1\\ y+3z=2\\ z=0\end{cases}$ 3p

Se rezolvă sistemul și se obține soluția $X=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ 4p

Soluție alternativă la a):

$\det(A)=1\Rightarrow A$ inversabilă 2p

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$ 3p

$(A^{-1}A)X=A^{-1}B\Longrightarrow X=A^{-1}B\Longrightarrow X=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ 5p

b) $A=I_3+C, C=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$ 2p

$C^2=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, C^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow C^n=O_{3,}\forall n\geq 3$ 3p

$A^{2026}=C_{2026}^0I_3+C_{2026}^1C+C_{2026}^2C^2+\cdots+C_{2026}^{2026}C^{2026}\Longrightarrow A^{2026}=C_{2026}^0I_3+C_{2026}^1C+C_{2026}^2C^2$, finalizare 5p

Subiectul 2. (20 puncte)

a) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2m+2), B(2m+1,2)$ și $C(2,3)$, unde $m\in R$. Aflați valoarea parametrului real m pentru care aria triunghiului ABCeste minimă.

b) Să se arate că există o infinitate de matrice $A\in M_2(C)$cu proprietatea $A^{2026}-A^{2025}+A^{2024}=O_2$.

SOLUȚIE:

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

a) $A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2m+2 & 1 \\ 2m+1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ 2p

$A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|-4m^2+4m-2|=|2m^2-2m+1|$ 3p

$2m^2-2m+1>0, \forall m\in \boldsymbol{R} \Longrightarrow A_{\Delta ABC}=2m^2-2m+1$ 2p

$\min\limits_{m\in \boldsymbol{R}}(2m^2-2m+1)=\frac{1}{2}$ pentru $m=\frac{1}{2}$ 3p

b) Proprietatea este evident adevarată pentru matricea nulă de ordinul al doilea O_2.

Considerăm matrice de forma $A=\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $m\in R\setminus\{0\}$ 5p

$A^2=\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O_2$ 10p

Prin urmare, pentru $n\geq 2$avem $A^n=O_2$. Deci orice matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ verifică relația dată 5p

Subiectul 3. (20 puncte)

a) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^{2026x}+b^{2026x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, unde $a,b\in(0,+\infty)$.

b) Aflați valoarea expresiei $a+2b+c$, unde numerele a, b și c sunt reale și funcția

$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}, f(x)=\begin{cases} 1, & x\leq 0 \\ ae^{-x}+be^{x}+cx(e^{x}-e^{-x}), & 0<x<1 \\ e^{2-x}, & x\geq 1 \end{cases}$ este continuă pe mulțimea numerelor reale.

SOLUȚIE:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^{2026x}+b^{2026x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=(1^{\infty})$ 2p

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{a^{2026x}+b^{2026x}-2}{2}\right)^{\frac{2}{a^{2026x}+b^{2026x}-2}}\right]^{\frac{a^{2026x}+b^{2026x}-2}{2}\cdot\frac{1}{x}}$ 3p

$e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^{2026x}-1}{2026x}+\frac{b^{2026x}-1}{2026x}\right)\cdot 1013}=\left[e^{\ln(ab)}\right]^{1013}=(ab)^{1013}$ 5p

b) Din continuitatea funcției f obținem

$l_d(0)=a+b$ 2p

$l_s(0)=f(0)=1$, prin urmare $a+b=1$ (1)..2p

$l_d(1)=f(1)=e$ 2p

$l_s(1)=ae^{-1}+be+c(e-e^{-1})=\frac{a-c}{e}+(b+c)e$ 2p

$\frac{a-c}{e}+(b+c)e=\mathrm{e}\Rightarrow \mathrm{a}-\mathrm{c}=0, b+c=1$ (2)..1p

Din relațiile (1)+(2) se obține $\mathrm{a}+2b+\mathrm{c}=(\mathrm{a}+\mathrm{b})+(\mathrm{b}+\mathrm{c})=2$ 1p

Subiectul 4. (30 puncte)

În tratamentul cu antibiotice, cantitatea de antibiotic din sânge se calculează după formula:

$$c_n=c\cdot\left(1+e^{kt}+e^{2kt}+\ldots+e^{(n-1)kt}\right)$$

unde c = cantitatea de antibiotic exprimată în miligrame pe litru, n = numărul de doze administrate în tratament, t = timpul dintre administrarea a două doze, k = constanta care arată cât de repede se metabolizează antibioticul în sânge.

a) Determinați cantitatea de antibiotic din sânge după administrarea a trei doze, pentru $c=0{,}5$ mg/l, $t=4$ ore, $k=-0{,}75$, $e\cong 3$. Exprimați rezultatul cu două zecimale exacte.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$ pentru $c=0{,}5$ mg/l, $t=4$ ore, $k=-0{,}75$, $e\cong 3$. Exprimați rezultatul cu două zecimale exacte.

SOLUȚIE:

a) $c_3=0{,}5\cdot(1+e^{-3}+e^{-6})\cong 0{,}5\cdot(1+3^{-3}+3^{-6})$ 5p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

$c_3 \cong 0{,}5 \cdot \left(1 + \frac{1}{27} + \frac{1}{729}\right) = \frac{757}{1458} \cong 0{,}51$ 5p

b) $1 + e^{kt} + e^{2kt} + \cdots + e^{(n-1)kt} = \frac{1-e^{nkt}}{1-e^{kt}}$ 10p

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} c\left(\frac{1-e^{nkt}}{1-e^{kt}}\right) = \frac{c}{1-e^{kt}}$, $k < 0$..............................5p

$c = 0{,}5;\ kt = -3; e \cong 3 \Rightarrow \frac{0{,}5}{1-e^{-3}} \cong \frac{27}{52} = 0{,}51$ 5p

Notă:
*Se acordă **10 puncte din oficiu**.*
***Punctajul maxim este de 100 de puncte.**.*

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro