CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
Ediția a XXVII-a
ETAPA LOCALĂ – 30 ianuarie 2026

Clasa a IX-a, profil real, specializarea științe ale naturii – secțiunea H2

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (20 puncte)

Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_n = 0,\underbrace{33...3}_{n\,cifre\,de\,3}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Verificați dacă numărul $\dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{10^2}+\dfrac{3}{10^3}$ este termen al șirului $(a_n)_{n\geq 1}$.

b) Arătați că pentru orice număr natural nenul n, a_n este suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice.

c) Arătați că $a_n = \dfrac{10^n - 1}{3\cdot 10^n}$.

d) Calculați suma $S = 10\cdot a_1 + 10^2\cdot a_2 + ... + 10^{2026}\cdot a_{2026}$.

Soluție: a) $\dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{10^2}+\dfrac{3}{10^3} = 0,3+0,03+0,003 = 0,333 = a_3$, prin urmare numărul $\dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{10^2}+\dfrac{3}{10^3}$ este al treilea termen al șirului $(a_n)_{n\geq 1}$ **5p**

b) Șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ definit prin $b_n = 3\cdot\dfrac{1}{10^n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, este o progresie geometrică cu rația $q = \dfrac{1}{10} = 0,1$ **2p**

$b_1 = 3\cdot\dfrac{1}{10} = 0,3$; $b_2 = 3\cdot\dfrac{1}{10^2} = 0,03$; $b_3 = 3\cdot\dfrac{1}{10^3} = 0,003$; ...

$S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = 0,3 + 0,03 + ... + 0,\underbrace{00...03}_{n\,cifre} = 0,\underbrace{33...3}_{n\,cifre} = a_n$ **3p**

c) $a_n = S_n = b_1\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} = \dfrac{10^n-1}{3\cdot 10^n}$ **5p**

d) $S = 10\cdot a_1 + 10^2\cdot a_2 + ... + 10^{2026}\cdot a_{2026} = \dfrac{10+10^2+...+10^{2026}-2026}{3} = \dfrac{10^{2027}-10}{27} - \dfrac{2026}{3} = \dfrac{10^{2027}-18244}{27}$ **5p**

Subiectul 2. (20 puncte)

Caculați partea întreagă a numărului $A = \left\{\dfrac{2025}{2026}\right\} + \left\{2\cdot\dfrac{2025}{2026}\right\} + \left\{3\cdot\dfrac{2025}{2026}\right\} + ... + \left\{2025\cdot\dfrac{2025}{2026}\right\}$ unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Soluție: $A=\left\{1-\frac{1}{2026}\right\}+\left\{2-\frac{2}{2026}\right\}+\left\{3-\frac{3}{2026}\right\}+\ldots+\left\{2025-\frac{2025}{2026}\right\}$ **4p**

$A=\left\{-\frac{1}{2026}\right\}+\left\{-\frac{2}{2026}\right\}+\left\{-\frac{3}{2026}\right\}+\ldots+\left\{-\frac{2025}{2026}\right\}$ **4p**

$A=\left(-\frac{1}{2026}+1\right)+\left(-\frac{2}{2026}+1\right)+\ldots+\left(-\frac{2025}{2026}+1\right)$ **4p**

$A=-\frac{2025}{2}+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{2025}=\frac{2025}{2}$ **4p**

Partea întreagă a numărului A este $[A]=\left[\frac{2025}{2}\right]=1012$ **4p**

Subiectul 3. (20 puncte)

Fie $ABCD$ și $DGFE$ două paralelograme.

a) Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, demonstrați că $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

b) Demonstrați că triunghiurile ACF și BEG au același centru de greutate.

Soluție:

a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=\vec{0}$ **10p**

b) Notăm cu G_1 centrul de greutatate al triunghiului ACF și cu G_2 centrul de greutate al triunghiului BEG.

Avem $\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{G_1C}+\overrightarrow{G_1F}=\vec{0}$ și $\overrightarrow{G_2B}+\overrightarrow{G_2E}+\overrightarrow{G_2G}=\vec{0}$ **5p**

Scăzând cele două relații, obținem că $3\overrightarrow{G_1G_2}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FG}=\vec{0}$, deci $G_1=G_2$. **5p**

Metodă alternativă:

$\overrightarrow{G_1G_2}=\overrightarrow{r_{G_2}}-\overrightarrow{r_{G_1}}=\frac{\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_E}+\overrightarrow{r_G}}{3}-\frac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_C}+\overrightarrow{r_F}}{3}$ **3p**

$ABCD$ paralelogram $\Rightarrow \overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_C}=\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_D}$ **2p**

$DGFE$ paralelogram $\Rightarrow \overrightarrow{r_D}+\overrightarrow{r_F}=\overrightarrow{r_G}+\overrightarrow{r_E}$ **2p**

$\overrightarrow{G_1G_2}=\frac{\left(\overrightarrow{r_B}-\overrightarrow{r_A}-\overrightarrow{r_C}\right)+\left(\overrightarrow{r_E}+\overrightarrow{r_G}-\overrightarrow{r_F}\right)}{3}=\frac{-\overrightarrow{r_D}+\overrightarrow{r_D}}{3}=\vec{0}$, deci $G_1=G_2$. **3p**

Subiectul 4. (30 puncte)

Pe un lac cresc anual foarte mulți nuferi. În prima zi a anului pe lac se află 2 nuferi, iar în fiecare din zilele următoare, numărul nuferilor crește cu 3 față de numărul nuferilor aflați pe lac în ziua precedentă.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

a) Demonstrați că numerele ce reprezintă nuferii de pe lac în zilele 1, 3 și 11 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

b) Câți nuferi sunt pe lac în a 325-a zi a anului?

c) Demonstrați că suma pătratelor numerelor ce reprezintă nuferii din oricare două zile consecutive, nu poate fi pătrat perfect.

Soluție: a) Notând cu $(a_n)_{n\geq 1}$ șirul numerelor ce reprezintă nuferii care se află pe lac începând cu prima zi a anului (a_n reprezintă numărul nuferilor din ziua n), avem $a_1 = 2$, $a_3 = 2+2\cdot 3 = 8$, $a_{11} = 2+10\cdot 3 = 32$ **5p**

${a_3}^2 = a_1 \cdot a_{11}$, obținem că a_1, a_3, a_{11} sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice....................................**5p**

b) $a_1 = 2$ și $a_{n+1} = a_n + 3, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Se demonstrează utilizând metoda inducției matematice sau se aplică formula termenului general al unei progresii aritmetice că $a_n = 3n-1$ **5p**

$a_{325} = 3\cdot 325 - 1 = 974$ nuferi...**5p**

c) Cum ${a_n}^2 + {a_{n+1}}^2 = (3n-1)^2 + (3n+2)^2 = M_3 + 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, obținem că ${a_n}^2 + {a_{n+1}}^2$ nu poate fi pătrat perfect......**10p**

Se acordă 10 puncte din oficiu. Punctajul maxim este 100 puncte.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro