



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Ediția a XXVIII-a
ETAPA LOCALĂ – 30 ianuarie 2026

Clasa a XII-a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

Subiectul 1. (20 puncte)

Considerăm funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln x$ și $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ primitiva acesteia care verifică condiția $F(1) = 0$.

- Calculați $\int_0^1 f(e^x) dx$.
- Determinați funcția F .
- Calculați $\int_1^e (xf(x) + F(x)) dx$.

Subiectul 2. (20 puncte)

Pe mulțimea numerelor reale definim legea asociativă $x * y = 8xy + x + y$.

- Arătați că $x * y = 8 \left(x + \frac{1}{8}\right) \left(y + \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8}$.
- Determinați elementele egale cu simetricile lor față de „* ”.
- Demonstrați că $\frac{1}{8} * \frac{2}{8} * \frac{3}{8} * \dots * \frac{n}{8} = \frac{(n+1)! - 1}{8}$, pentru orice $n \geq 2$.

Subiectul 3. (20 puncte)

Pentru fiecare număr real a definim funcția $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = \frac{1}{|x-a|+1}$.

- Arătați că orice primitivă a funcției f_a este strict crescătoare.
- Calculați $\int_1^3 f_2(x) dx$.
- Determinați $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{2026} f_a(x) dx$.

Subiectul 4. (30 puncte)

Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție „o ” prin $x \circ y = xy - 7x - 7y + 56$, pentru orice x, y numere reale.

- Demonstrați că legea este comutativă și asociativă.
- Grig alege numerele 6, 680, 4 și calculează $(x \circ y) \circ z$, unde (x, y, z) este o permutare a numerelor alese. Demonstrați că de fiecare dată Grig obține același rezultat.
- Pe tablă sunt scrise numerele: 1, 3, 5, 7, 9, ..., 99. Grig alege, în mod arbitrar, dintre acestea, două numere m și n , le șterge, iar în locul doar unuia dintre ele scrie numărul $m \circ n$. Continuă procedeul până când pe tablă rămâne un singur număr. Care este acest număr?

Notă:

Timp de lucru 3 ore; toate subiectele sunt obligatorii; se acordă 10 puncte din oficiu.

Punctajul maxim este de 100 de puncte.