Olimpiada Națională de Matematică 2026

Etapa locală - Iași, ianuarie 2026

Clasa a XII-a

Problema 1.

Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ definim operația asociativă $x \circ y = 8\left(x+\frac{1}{8}\right)\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}$.

a) Determinați elementele egale cu simetricele lor față de operația „$\circ$”.

b) Demonstrați că $\frac{1}{8} \circ \frac{2}{8} \circ \ldots \circ \frac{n}{8} = \frac{(n+1)!-1}{8}$ pentru orice număr natural $n \geq 2$.

Gazeta Matematică 10/2025 (Supliment)

Problema 2.

Se consideră funcția $f_n : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_0^x t^n \operatorname{arctg} t \, \mathrm{d}t$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Determinați $f_1(x)$, $x \in (0, +\infty)$.

b) Calculați $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(1)$.

c) Demonstrați că $\lim\limits_{n \to +\infty} n f_n(1) = \frac{\pi}{4}$.

Problema 3.

Dată funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definim pe mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale operația „$*$” prin

$$x * y = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Determinați funcția *f* știind că $(\mathbb{R}, *)$ este grup abelian cu proprietatea că simetricul oricărui element $x \in [-1, 1]$ este un element $x' \in [-1, 1]$.

Problema 4.

Fie $0 \leq a < b$ două numere reale și $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe $[a, b]$, cu derivata a doua continuă. Dacă $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(a^2 f'(a) - b^2 f'(b)\right) + bf(b) - af(a)$, arătați că există $c \in (a, b)$ pentru care $f''(c) = 0$.

Timp de lucru: 3 ore.
Problemele 1 și 2 sunt notate cu câte 23 de puncte, iar probleme 3 și 4 cu câte 22 de puncte
Se acordă 10 puncte din oficiu

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro