



Olimpiada Națională de Matematică 2026

Etapă locală - Iași, 30 ianuarie 2026

Clasa a IX-a

Problema 1.

(22 de puncte)

Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice numere reale $x_1, x_2, \dots, x_n$, are loc inegalitatea

$[x_1]^2 + [x_2]^2 + \dots + [x_n]^2 + 3n > 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Gazeta Matematică 11/2025 (Supliment)

Problema 2.

(23 de puncte)

Se consideră un triunghi ABC în care punctele D, E și F sunt mijloacele laturilor BC, AC , respectiv AB . Dacă M este un punct oarecare în planul triunghiului, demonstrați că paralela prin D la dreapta MA , paralela prin E la dreapta MB și paralela prin F la dreapta MC sunt trei drepte concurente.

Problema 3.

(23 de puncte)

Să se demonstreze inegalitățile:

a) $\frac{x}{y+z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{x}{y} + \frac{x}{z} \right)$, oricare ar fi $x, y, z \in (0, \infty)$.

b) $\frac{2a}{a^2+bc} + \frac{2b}{b^2+ca} + \frac{2c}{c^2+ab} \leq \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}$, oricare ar fi $a, b, c \in (0, \infty)$.

Problema 4.

(22 de puncte)

a) Dacă x și y sunt numere naturale nenule astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$, demonstrați că $x = y$.

b) Determinați numerele naturale nenule a, b, c știind că $a < b < c$ și $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

c) Fie n număr natural, $n \geq 3$. Demonstrați că există numerele naturale nenule $a_1 < a_2 < \dots < a_n$

astfel încât $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1$.

Timp de lucru: 3 ore.

Se acordă 10 puncte din oficiu.